بسم الله الرحمن الرحيم

انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، شمارهٔ ۲۲۳

نخستین درس احتمال

تألیف

اس ـ راس

ترجمهٔ

دکتر حسنعلی آذرنوش ـ دکتر ابوالقاسم بزرگ نیا

دکتر علی مشکانی ـ دکتر حسینعلی نیرومند

۱۳۷۶

Ross, Sheldon M.
راس ، شلدون

نخستین درس احتمال / تألیف . اس . راس ؛ ترجمهٔ حسنعلی آذرنوش ... [و دیگران] . ـ مشهد : دانشگاه فردوسی (مشهد) ، ۱۳۷۶ .

یازده ، ۴۷۳ ص. : جدول، نمودار . ـ(انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ؛ ۲۲۳) .

ISBN: 964-6335 - 07 - 1

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار) .

عنوان اصلی : A First Course in Probability.

۱. احتمالات. الف. آذرنوش، حسنعلی ، ۱۳۱۹ - مترجم . ب . دانشگاه فردوسی (مشهد) . ج . عنوان .

QA ۲۷۳/ ۲ ر ۲ ن ۳ ۵۱۹/۲
۱۳۷۶

کتابخانه ملی ایران م ۷۶ ۶۸۷۷

شناسنامهٔ کتاب

نام : نخستین درس احتمال

تألیف : راس ، شلدون

ترجمهٔ : دکتر حسنعلی آذرنوش ـ دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا
دکتر علی مشکانی ـ دکتر حسینعلی نیرومند

ناشر : انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ انتشار : زمستان ۱۳۷۶

تعداد : ۲۰۰۰ نسخه ـ چاپ اوّل

امور فنّی و چاپ : مؤسّسهٔ چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

قیمت : ۹۳۰۰ ریال

شابک : ۱ ـ ۰۷ ـ ۶۳۳۵ ـ ۹۶۴ (ISBN: 964 - 6335 - 07 - 1)

فهرست مطالب

پیشگفتار مترجمان

پیدایش دانش احتمال به اوایل قرن هفدهم برمی گردد و با پژوهشهای علمی روی بازیهای تصادفی و مسائل بخت و اقبال آغاز شده است و ریاضی دانان برجسته ای چون پاسکال و فرما آن را پایه گذاری کرده اند .

اهمیت علم احتمال در سالهای اخیر یعنی از زمانی که مفهوم آن با دانش آمار توأم گردید و در زمینه های مختلف فنی به کار گرفته شد، فزونی یافته است . لذا تألیف و ترجمهٔ کتابهایی در این زمینه ضروری به نظر می رسد.

روش کتاب حاضر به این صورت است که پس از بیان اصول و قضایای مربوط به هر فصل مثالهای کاربردی و محسوس زیادی را مطرح می سازد و به این ترتیب مطالب نظری را قابل درك و دلچسب تر جلوه می دهد .

در ترجمهٔ این کتاب تلاش بر آن بوده است که تا حد امکان امانت در ترجمه و روانی متن حفظ شود . واژه های فارسی معادل متن اصلی از لغت نامه مرکز نشر دانشگاهی انتخاب شده اند .

این کتاب برای درس احتمال و کاربرد آن در رشتهٔ آمار می تواند به عنوان یک کتاب درسی باشد و برای سایر رشته های مهندسی و فنی در سطح کارشناسی و کارشناسی ارشد نیز مرجع بسیار مفیدی خواهد بود . ضمناً چون برای اغلب مسائل برنامه های کامپیوتری تهیه گردیده بر سایر کتابهای مشابه قبلی ارجح است .

مترجمان

پیشگفتار مؤلف

«می بینیم که نظریهٔ احتمال در نهایت ، درك شهودی را به صورت قابل محاسبه در می آورد و با دقت و درستی تمام آنچه را بطور غریزی احساس می شود و اغلب قادر به استدلال نیستیم برای ما مشخص می سازد. قابل ذکر است که این علم با توجه به بازیهای تصادفی شروع شد و در نهایت یکی از مهمترین موضوعات دانستنیهای بشری شده است . در واقع مسائل حیاتی در اکثر موارد تنها از نوع مسائل احتمالی است» .

عبارات فوق از بیانات ریاضی دان و منجم مشهور فرانسوی پیر سیمون مارکز دولاپلاس (نیوتن فرانسه) است. بسیاری از مردم گرچه ممکن است احساس کنند مارکز مشهور که خود سهم بسزایی در توسعهٔ احتمال نیز داشته است باید تا حدودی مبالغه کرده باشد ولی این که نظریهٔ احتمال وسیله ای مهم و اساسی تقریباً برای تمام علوم مهندسی، داروسازی، حقوق و صاحبان کارخانه هاست واقعیت دارد. در حقیقت شخص متفکر سؤال نمی کند که «چرا چنین است» بلکه می پرسد «احتمال این که چنین باشد چقدر است ؟» .

این کتاب به عنوان مقدمه ای بر نظریهٔ ریاضی احتمال برای دانشجویان ریاضی، مهندسی و علومی (شامل علوم اجتماعی و علوم مدیریت) که پیش نیاز دانش محاسبات مقدماتی را دارا می باشند درنظر گرفته شده است. این کتاب نه تنها ریاضیات نظریه احتمال بلکه با توجه به مثالهای بی شمار کاربردهای ممکن این موضوع را نیز ارائه می کند.

در فصل (۱) اصول اساسی آنالیز ترکیبی که در محاسبهٔ احتمالها فایدهٔ زیادی دارند ارائه شده است .

در فصل (۲) اصول نظریه احتمال را در نظر می گیریم و چگونگی کاربرد آنها را برای محاسبهٔ احتمالهای گوناگون مورد توجه در نظر می گیریم. این فصل شامل اثبات خاصیت مهم پیوستگی احتمالها (که اغلب نادیده گرفته می شود) است که از آن در مطالعهٔ «پارادوکس

منطقی» استفاده نمی شود .

فصل (۳) با موضوعات بسیار مهم احتمال شرطی و استقلال پیشامدها سروکار دارد . با چند مثال نقش احتمالهای شرطی را نه فقط وقتی اطلاعات نسبی میسر است بلکه به عنوان وسیله ای که به ما توان می دهد تا احتمالها را ساده تر محاسبه کنیم و حتی وقتی اطلاعات نسبی را نداشته باشیم بتوانیم تشریح کنیم، این روش بسیار مهم محاسبهٔ احتمالها با «شرطی کردن» در فصل (۷) دوباره ظاهر می شود که از آن برای به دست آوردن امیدهای ریاضی استفاده می کنیم .

در فصول (۴)، (۵) و (۶) مفهوم متغیّرهای تصادفی را معرفی می کنیم . در فصل ۴ و ۵ و ۶ به ترتیب به متغیّرهای تصادفی گسسته ، متغیّرهای تصادفی پیوسته و متغیّرهای تصادفی که دارای توزیع مشترك هستند می پردازیم .

فصل (۷) مفهوم مهم امید ریاضی را معرفی می کند. بعد از این که امید ریاضی متغیّر تصادفی را تعریف کردیم طریقهٔ محاسبهٔ امید ریاضی تابعی از یک متغیّر تصادفی را با استفاده از قانون آماردان ناآگاه نشان می دهیم که برای آن یک اثبات مقدماتی ارائه شده است . با چند مثال آورده شده در این قسمت، فایدهٔ این نتیجه را که امید ریاضی مجموع متغیّرهای تصادفی برابر مجموع امیدهای ریاضی آنهاست تشریح می کنیم. این فصل بخشهایی را در مورد امید شرطی که از آن در تخمین و توابع مولد گشتاورها استفاده می شود، نیز در بر می گیرد .

در فصل (۸) بیشترین نتایج نظری نظریهٔ احتمال را معرفی می کنیم. بویژه قانون قوی اعداد بزرگ و قضیهٔ حد مرکزی را برای متغیّرهای مستقل همتوزیع اثبات می کنیم . اثبات قانون قوی اعداد بزرگ (از طریق نامساوی کلموگرف و خاصیت پیوستگی احتمالها) کامل است در صورتی که اثبات قضیهٔ حد مرکزی قضیهٔ پیوستگی لِوی را فرض می گیرد.

در فصل (۹) چند موضوع اضافی مانند زنجیرهای مارکف ، فرآیند پواسون ، مقدمه ای بر نظریهٔ اطلاع و کُد گذاری ارائه می شود و در فصل (۱۰) شبیه سازی مورد بررسی واقع می شود.

در سر تاسر این کتاب مثالهای زیادی حل شده و مقدار زیادی مسأله نیز وجود دارد که به دو بخش «مسائل نظری» و « مسائل » تقسیم شده که توسط دانشجویان حل خواهد شد در انتهای کتاب جواب بیشتر مسائل داده شده است . در این جا لازم است از افراد زیر تشکر و

قدردانی نمایم : توماس . آر . فیشر ، از دانشگاه A & M تکزاس ، جی د وور از دانشگاه پلی تکنیک کالیفرنیا ، راب . جی . مورهد از دانشگاه میشیگان ، دیویدهیس از دانشگاه کُرنل ، ام . ساموئل از دانشگاه پُردو ، آی . آر . سویج از دانشگاه بال و بالاخره از آر . میلر از دانشگاه استانفورد .

اس . آر

فصل اوّل

آنالیز ترکیبی

۱ - مقدمه

ابتدا یک مثال جالب در ارتباط با احتمال ارائه می دهیم. یک سیستم مخابراتی مرکب از n آنتن ظاهراً یکسان است که قرار است به ترتیب خطی به یکدیگر وصل شوند. در این صورت سیستم حاصل، مادامی که هیچ دو آنتن متوالی معیوب نباشد؛ قادر به دریافت همه علایم ارسالی خواهد بود، و آن را **کارا** می نامند حال اگر؛ دقیقاً m آنتن از این n آنتن معیوب باشد، احتمال این که سیستم حاصل کارا باشد چقدر است؟ برای مثال در حالت خاص $n = ۴$ و $m = ۲$ ، شش آرایش ممکن سیستم به قرار زیر است.

$$\begin{array}{cccc}
\varnothing & 0 & 0 & \varnothing \\
\varnothing & 0 & \varnothing & 0 \\
0 & \varnothing & 0 & \varnothing \\
\varnothing & \varnothing & 0 & 0 \\
0 & \varnothing & \varnothing & 0 \\
0 & 0 & \varnothing & \varnothing
\end{array}$$

که در آن 0 به معنی کارا بودن آنتن و $\varnothing$ به معنی معیوب بودن آن است، پس سیستم حاصل در سه آرایش اول کارا و در سه آرایش باقیمانده غیر کاراست و منطقی به نظر می رسد که مقدار $\frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$ را به عنوان احتمال مطلوب اختیار کنیم. برای مقادیر کلی n و m ، احتمالی را

که سیستم کارا باشد به طریقی مشابه می توان محاسبه کرد؛ یعنی می توان تعداد آرایشهایی، که منجر به کارآیی سیستم می شودشمرد وسپس آن را به تعدادکل تمام آرایشهای ممکن تقسیم کرد.

از مطلب بالا در می یابیم که وجود، یک روش مؤثر برای شمارش تعداد راههایی که چیزها رخ می دهند سودمند است. در واقع، بسیاری مسائل را در نظریه احتمال می توان با شمردن تعداد راههای مختلفی که یک پیشامد ممکن است رخ دهد، حل کرد. نظریهٔ ریاضی شمارش را **آنالیز ترکیبی** می نامند.

۲ – اصل اساسی شمارش

اصل شمارش زیر برای کلیه مطالب بعدی بنیادی است. با بیان ساده، این اصل بیانگر آن است که اگر آزمایشی بتواند به هریک از m برآمد ممکن و آزمایشی دیگری به هریک از n برآمد ممکن منجر شود، آن گاه mn برآمد ممکن در دو آزمایش وجود دارد.

اصل اساسی شمارش

فرض کنید قرار است دو آزمایش انجام شود. در این صورت اگر آزمایش (۱) بتواند به هریک از m برآمد ممکن منتهی شود و اگر برای هر برآمد آزمایش (۱)، n برآمد ممکن از آزمایش (۲) وجود داشته باشد، آن گاه برای دو آزمایش جمعاً mn برآمد ممکن وجود دارد.

اثبات اصل اساسی: این اصل اساسی را می توان با شمارش کلیهٔ برآمدهای ممکن دوآزمایش به صورت زیر ثابت کرد:

$$\begin{array}{l}(1,1),(1,2),\ldots,(1,n)\\(2,1),(2,2),\ldots,(2,n)\\\quad\vdots\\(m,1),(m,2),\ldots,(m,n)\end{array}$$

که در آن می گوییم برآمد (i,j) است، اگر آزمایش (۱) به برآمد ممکن i و سپس آزمایش (۲) به برآمد ممکن j منجر شود، پس مجموعهٔ برآیندهای ممکن عبارت است از m سطر که هر سطر شامل n عنصر است که در نتیجه حکم ثابت می شود.

مثال ۲ الف. گروه کوچکی متشکل از ده مرد است که هریک از آنها سه فرزند پسر دارد.

اگر قرار باشد یک مرد و یکی از پسرانش را عنوان پدر و پسر سال انتخاب کنند، چند انتخاب مختلف امکان دارد؟

حل: اگر انتخاب این مرد را به عنوان برآمد آزمایش نخست و انتخاب بعدی یکی از پسرانش را به عنوان برآمد آزمایش دوم در نظر بگیریم، از اصل اساسی نتیجه می شود که ۳۰ = ۱۰ × ۳ انتخاب ممکن وجود دارد.

هنگامی که بیش از دو آزمایش باید انجام شود، اصل اساسی را می توان به صورت زیر تعمیم داد:

اصل اساسی تعمیم یافتهٔ شمارش

اگر r آزمایش که قرار است انجام شوند طوری باشند که اولی بتواند به هریک از n_1 برآمد ممکن منجر شود، و اگر برای هریک از این n_1 برآمد ممکن، n_2 برآمد ممکن از آزمایش دوم وجود داشته باشد، و برای هریک از برآمدهای ممکن این دو آزمایش، n_3 برآمد ممکن از آزمایش سوم وجود داشته باشد، و الی آخر . . . آن گاه کلاً $n_1 . n_2 . . . n_r$ برآمد ممکن از r آزمایش وجود دارد.

مثال ۲ ب. کمیته طرح ریزی دانشکده‌ای مرکب از ۳ دانشجوی سال اول، ۴ دانشجوی سال دوم، ۵ دانشجوی سال سوم و ۲ دانشجوی سال چهارم است. می خواهیم زیر کمیته ای که در آن ۴ نفر و از هر کلاسی یک نفر شرکت دارند تشکیل دهیم. چند زیر کمیته مختلف می توان تشکیل داد؟

حل: انتخاب یک زیر کمیته را می توان به عنوان ترکیب برآمد چهار آزمایش جداگانهٔ انتخاب یک نماینده از هریک از کلاسها در نظر گرفت. پس با در نظرگرفتن حالت تعمیم یافتهٔ اصل اساسی نتیجه می شود که ۱۲۰ = ۲ × ۵ × ۴ × ۳ زیر کمیتهٔ ممکن وجود دارد.

مثال ۲ پ. چند پلاک نمره اتومبیل مختلف می توان ساخت، در صورتی که بدانیم از ۷ جای در نظر گرفته شده، ۳ جای اول با حروف و چهارجای بعدی با اعداد پر می شود.

حل: بنا به شکل تعمیم یافتهٔ اصل اساسی پاسخ عبارت است از

$$۲۶ \times ۲۶ \times ۲۶ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۷۵۷۶۰۰۰۰$$

مثال ۲ ت . تعداد توابعی که بر n نقطه تعریف می شود چندتاست ، اگر مقادیر تابع برابر ۰ یا ۱ باشد؟

حل : فرض کنیدنقاط عبارت است از ۱ ، ۲ ، . . . ، n چون برای هر n ، . . . ، ۲ ، ۱ = i ؛ $f(i)$ باید 0 یا 1 باشد . بنابراین 2^n تابع ممکن وجود دارد .

مثال ۲ ث . در مثال ۲ پ ، اگر تکرار بین حرفها یا اعداد جایز نباشد، چند پلاك نمره وجود دارد ؟

حل : در این حالت به تعداد $۲۶ \times ۲۵ \times ۲۴ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ = ۷۸۶۲۴۰۰۰$. پلاك نمره وجود دارد .

۳ - جایگشتها

چند آرایش مرتب شدهٔ مختلف از حروف a ، b و c امکان دارد؟

باشمارش مستقیم ملاحظه می کنیم که ۶ آرایش وجوددارد که عبارت است از abc ، acb ، bac ، bca ، cab و cba . هرآرایش یک **جایگشت** نامیده می شود . بنابراین ، مجموعه ای مرکب از ۳ شئ دارای ۶ جایگشت ممکن است . این نتیجه را از اصل اساسی نیز می توان به دست آورد ، زیرا اولین شئ در جایگشت می تواند هریک از ۳ شئ باشد ، و سپس شئ دوم در جایگشت را می توان هریک از ۲ شئ باقیمانده انتخاب کرد و بالاخره شئ سوم در جایگشت از ۱ شئ باقیمانده انتخاب می شود . در نتیجه $۶ = ۱ \times ۲ \times ۳$ جایگشت ممکن حاصل می شود .

اکنون فرض کنید که n شئ داریم . استدلالی مشابه آنچه که برای ۳ حرف به کار بردیم نشان می دهد که

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

جایگشت مختلف از n شئ داریم .

مثال ۳ الف . چند ترتیب مختلف برای یک تیم بیسبال مرکب از ۹ بازیکن امکان دارد؟

حل : تعداد ترتیبهای ممکن $۳۶۲۸۸۰ = !۹$ است .

مثال ۳ ب . کلاس درس احتمال مرکب از ۶ دانشجوی پسر و ۴ دانشجوی دختر است .

بعد از گرفتن امتحان، دانشجویان برحسب نمراتشان رتّبه بندی می شوند. فرض کنید هیچ دو دانشجویی نمرهٔ برابر نگرفته باشند.

(الف) چند رتبه بندی مختلف امکان دارد؟

(ب) اگردو گروه دانشجو بین خودشان رتبه‌بندی شوند، چندرتبه بندی مختلف امکان دارد؟

حل: (الف) چون هر رتبه بندی متناظر با آرایش مرتب شده خاصی از ۱۰ نفر است، پس پاسخ این قسمت عبارت است از $10! = 3628800$.

(ب) چون !۶ رتبه بندی ممکن از پسران دانشجو و !۴ رتبه بندی ممکن از دختران دانشجو بین خودشان وجود دارد، از اصل اساسی نتیجه می شود که $(6!)(4!) = (720)(24) = 17280$ رتبه‌بندی در این حالت موجود است.

مثال ۳ پ. دانشجویی ۱۰ کتاب دارد که می خواهد در قفسه ای بچیند. از این کتابها ۴ کتاب ریاضی، ۳ کتاب شیمی، ۲ کتاب تاریخ و یکی زبان خارجی است. او می خواهد کتابهایش را طوری مرتب کند که کتابهای مربوط به یک موضوع در قفسه کنار هم باشند. چند آرایش مختلف امکان دارد؟

حل: $4!\,3!\,2!\,1!$ آرایش وجود دارد بطوری که کتابهای ریاضی در ابتدای ردیف، سپس کتابهای شیمی، بعد کتابهای تاریخ و بالاخره کتاب زبان است. بطور مشابه برای هر ترتیب ممکن از موضوعها $4!\,3!\,2!\,1!$ آرایش ممکن وجود دارد. چون $4!$ ترتیب ممکن از این چهار موضوع وجود دارد، پاسخ مطلوب برابر $4!\,4!\,3!\,2!\,1! = 6912$ است.

اکنون به تعیین تعداد جایگشتهای مجموعهٔ n شئ که بعضی از آنها متمایز از یکدیگر نیستند می پردازیم. برای روشن شدن مطلب، مثال زیر را در نظر می گیریم.

مثال ۳ ت. با استفاده ازحروف PEPPER چندآرایش حرفی مختلف می توان تشکیل داد؟

حل: ابتدا ملاحظه می کنیم که وقتی سه حرف P و دو حرف E از یکدیگر متمایزند، $6!$ جایگشت ازحروف $P_1\ E_1\ P_2\ P_3E_2R$ وجود دارد. با وجود این جایگشت دلخواهی از این جایگشتها، مثلاً $P_1\ P_2E_1\ P_3E_2R$ را در نظر بگیرید. اکنون اگر P ها را بین هم و E ها را بین هم جا به جا کنیم، آرایش حاصل بازهم به شکل P P E P E R خواهدبود. یعنی کلیه $3!\,2!$ جایگشت

$P_1\,P_2\,E_1\,P_3\,E_2\,R$	$P_1\,P_2\,E_2\,P_3\,E_1\,R$
$P_1\,P_3\,E_1\,P_2\,E_2\,R$	$P_1\,P_3\,E_2\,P_2\,E_1\,R$
$P_2\,P_1\,E_1\,P_3\,E_2\,R$	$P_2\,P_1\,E_2\,P_3\,E_1\,R$
$P_2\,P_3\,E_1\,P_1\,E_2\,R$	$P_2\,P_3\,E_2\,P_1\,E_1\,R$
$P_3\,P_1\,E_1\,P_2\,E_2\,R$	$P_3\,P_1\,E_2\,P_2\,E_1\,R$
$P_3\,P_2\,E_1\,P_1\,E_2\,R$	$P_3\,P_2\,E_2\,P_1\,E_1\,R$

به شکل P P E P E R است. بنابر این از حروف P E P P E R ، $6!/3!\,2! = 60$ آرایش ۶ حرفی ممکن می توان به وجود آورد.

بطور کلی، با استدلالی مشابه با مثال ۳ ت می توان نشان داد که

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

جایگشت مختلف از n شیی وجود دارد که n_1 تا، n_2 تا، . . . ، n_r تا از آنها شبیه یکدیگرند.

مثال ۳ ث. در مسابقهٔ شطرنجی ۱۰ نفر به قرار زیر شرکت دارند : ۴ نفر روسی، ۳ نفر امریکایی، ۲ نفر انگلیسی و ۱ نفر برزیلی. اگر نتیجهٔ مسابقه برحسب ملیتهای بازیکنها به ترتیب احراز مقامشان در مسابقه وارد لیست شود، چند برآمد ممکن است؟

حل : $\dfrac{10!}{4!\,3!\,2!\,1!} = 12600$ برآمد ممکن وجود دارد.

مثال ۳ ج. مجموعه ای مرکب از ۴ پرچم سفید، ۳ پرچم قرمز و ۲ پرچم آبی است، چند آرایش مختلف با این ۹ پرچم که در یک خط آویخته شده است می توان ساخت؟ در صورتی که پرچمهای همرنگ یکسان است.

حل : $\dfrac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260$ آرایش مختلف وجود دارد.

۴ - ترکیبها

معمولاً تعیین تعداد گروههای مختلف از r شیٔ که می توان از n شیٔ تشکیل داد مورد توجه ماست. برای مثال، چندگروه مختلف ۳تایی از اقلام D، C، B، A و E می توان انتخاب کرد؟ برای پاسخ دادن به این مسأله، به صورت زیر استدلال می کنیم: برای انتخاب قلم اول ۵ راه، سپس برای انتخاب قلم بعدی ۴ راه و برای انتخاب قلم نهایی ۳ راه وجود دارد، بنابراین وقتی ترتیب انتخاب اقلام را در نظر بگیریم $5\,.\,4\,.\,3$ راه برای انتخاب گروه ۳ تایی وجود دارد.

با وجود این، چون هر گروه ۳ تایی مثلاً گروه مرکب از اقلام A ، B و C، ۶ بار شمرده می شود (یعنی وقتی ترتیب انتخاب رعایت می شود، کلیه جایگشتها، ABC ، ACB ، BAC ، BCA ، CAB و CBA شمرده می شوند) در نتیجه تعداد کل گروههایی که می توان تشکیل داد برابر است با

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

بطور کلی، وقتی ترتیب انتخاب رعایت می شود، $n (n - 1) \ldots (n - r + 1)$، تعداد راههای مختلفی را که یک گروه r تایی را می توان از n قلم انتخاب کرد ارائه می دهد و چون هر گروه r تایی $r!$ بار در این شمارش شمرده می شود، تعداد گروههای مختلف r تایی را که از مجموعه n قلم می توان تشکیل داد عبارت است از

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

نمادگذاری و اصطلاحات

برای $r \leq n$، $\binom{n}{r}$ را به صورت

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

تعریف کرده و می گوییم که $\binom{n}{r}$ تعداد ترکیبات n شیئ را r به r نشان می دهد[1]. پس $\binom{n}{r}$ تعداد گروههای مختلف به حجم r را نشان می دهد که از مجموعهٔ n شیئ بدون درنظر گرفتن ترتیب انتخاب شده است.

مثال ۴ الف. می خواهیم از بین یک گروه ۲۰ نفری، کمیته ای سه نفری تشکیل دهیم. چند کمیتهٔ مختلف می توان تشکیل داد؟

حل: $\binom{20}{3} = \frac{20.\ 19.\ 18}{3.\ 2.\ 1} = 1140$ کمیتهٔ مختلف می توان تشکیل داد.

مثال ۴ ب. از گروهی مرکب از ۵ مرد و ۷ زن، چند کمیتهٔ مختلف که از ۲ مرد و ۳ زن تشکیل شده باشد می توان تشکیل داد؟ اگر ۲ نفر از زنان باهم قهر باشند و از کار در یک کمیته

۱- بنابه قرارداد $0!$ را برابر ۱ تعریف می کنیم . $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

خودداری کنند، چند کمیته ممکن است .

حل : چون $\binom{5}{2}$ گروه ممکـن مرکب از ۲ مردو $\binom{7}{3}$ گروه ممکـن مرکب از ۳ زن وجود دارد، از اصل اساسی نتیجه می شود کـه $\binom{5}{2}\binom{7}{3} = \left(\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\right)\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 350$ کـمیتـه ممکن مرکب از ۲ مرد و ۳ زن وجود دارد.

از طرفی اگـر دو نفر از زنـان از همکاری در یک کمیتـه خـودداری کنند، در این صـورت $\binom{2}{0}\binom{5}{3}$ گروه ممکن مرکب از سه زن وجود دارد کـه شامل هیچ یک از دو زن مورد نظر نیست و $\binom{2}{1}\binom{5}{2}$ گـروه مرکب از سه زن وجـود دارد کـه دقیقـاً یکی از دو زن مذکـور را شـامل است، بنابراین نتـیجه می شـود کـه $\binom{2}{0}\binom{5}{3} + \binom{2}{1}\binom{5}{2} = 30$ گـروه مـرکب از سه زن وجـود دارد کـه دو زنی را که باهم قـهرند شامـل نیست. چون به $\binom{5}{2}$ راه می توان دو مرد را انتـخاب کرد، پس در این حالت نتیجه می شود که $30\binom{5}{2} = 300$ کمیتهٔ ممکن وجود دارد.

مثال ۴ پ. مجموعه ای از n آنتن را در نظر بگیرید که m تا معیوب و n - m تا سالم است و فرض کنید کلیه آنتنهای معیوب و کلیه آنتنهای سالم غیر متمایز است. چند ترتیب خطی وجود دارد که در آنها هیچ دو آنتن معیوب پهلوی هم قرار نگیرند؟

حل: تصور کنید که n - m آنتن سالم را در یک ردیف قرار داده ایم. اکنون اگر قرار باشد که هیچ دو آنتن مـعیوب پهلوی هم واقع نشـوند، باید فضاهای بین آنتنهـای سالم هریک حداکـثر شـامل یک آنـتن مـعیـوب باشـد. یعنی در n - m + 1 مـوضع ممکن بین n - m آنتن سـالم، کـه در شکل 1 - 1 با نماد ∧ نشان داده شـده است ، باید m موضع از آنـها را برای جای دادن آنـتـنهای معیوب انـتخاب کرد. بنابراین $\binom{n-m+1}{m}$ ترتیب ممکن که در آنها حـداقل یک آنتن سالـم بین هردو آنتن معیوب قرار دارد وجود دارد .

∧o∧o∧o∧ . . . ∧o∧o∧

o = سالم

∧ = محل حداکثر یک آنتن معیوب

شکل ۱-۱

یک تساوی ترکیبی سودمند به صورت زیر است

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad 1 \leq r \leq n \tag{۱-۴}$$

معادلهٔ (۴-۱) را می توان بطور تحلیلی یا با استدلال ترکیبی زیر ثابت کرد. گروهی مرکب از n شیئ در نظر گرفته و یکی از این اشیاء را که با شمارهٔ ۱ مشخص می کنیم، در نظر بگیرید. اکنون $\binom{n-1}{r-1}$ ترکیب با حجم r که شامل شیئ ۱ است وجود دارد (زیرا هر ترکیبی ازاین نوع با انتخاب r - 1 شیئ از n - 1 شیئ باقیمانده تشکیل می شود) همچنین $\binom{n-1}{r}$ ترکیب با حجم r وجود دارد که شامل شیئ 1 نیست . چون در کل $\binom{n}{r}$ ترکیب با حجم r وجود دارد، معادلهٔ (۴-۱) نتیجه می شود.

مقادیر $\binom{n}{r}$ را اغلب ضرایب دوجمله ای می نامند، دلیل آن هم وجود این مقادیر در قضیه دوجمله ای است.

قضیهٔ دوجمله ای

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{۲-۴}$$

دو اثبات از قضیه دوجمله ای ارائه می دهیم. اولی اثباتی با استقراء ریاضی و دیگری براساس ملاحظات ترکیبی است.

اثبات قضیهٔ دوجمله ای با استقراء : وقتی n = 1 ، معادلهٔ (۴-۲) به صورت

$$x + y = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = x + y$$

سادهٔ می شود.

فرض کنید معادلهٔ (۴-۲) برای n - 1 برقرار باشد، اکنون داریم

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1} \\ &= (x+y)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k}\end{aligned}$$

در مجموع اول قرار می دهیم $i = k + 1$ و در مجموع دوم $i = k$ ، حاصل می شود

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} x^i y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i y^{n-i} \\
&= x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \right] x^i y^{n-i} + y^n \\
&= x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} + y^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}
\end{aligned}
$$

تساوی آخر طبق معادلهٔ (۴-۱) نتیجه می شود . پس قضیه به استقراء ثابت شده است .

اثبات ترکیبی قضیهٔ دو جمله‌ای : حاصل ضرب

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \cdots (x_n + y_n)$$

را در نظر بگیرید . گسترش آن عبارت از مجموع 2^n جمله است که هر جمله حاصل ضرب n عامل است . به علاوه هریک از 2^n جمله در مجموع ، شامل عامل x_i یا y_i برای $i = 1, 2, \ldots, n$ می باشند . برای مثال ،

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = x_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2$$

اکنون باید دید چند جمله از 2^n جمله در مجموع دارای k عامل از x_i ها و $(n - k)$ عامل از y_i هاست؟ چون هر جمله متشکل از k تا x_i و $n - k$ تا y_i متناظر با انتخاب یک گروه k تایی از n مقدار $x_1, \ldots, x_n$ است ، پس تعدا این نوع جمله ها برابر $\binom{n}{k}$ است . اکنون باقراردادن $x_i = x$ و $y_i = y$ ، $i = 1, \ldots, n$ مشاهده می کنیم که

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

مثال ۴ت . $(x + y)^3$ را بسط دهید .

حل :

$$
\begin{aligned}
(x+y)^3 &= \binom{3}{0} x^0 y^3 + \binom{3}{1} x^1 y^2 + \binom{3}{2} x^2 y + \binom{3}{3} x^3 y^0 \\
&= y^3 + 3xy^2 + 3x^2 y + x^3
\end{aligned}
$$

مثال ۴ث. یک مجموعه n عضوی دارای چند زیر مجموعه است ؟

حل : چون $\binom{n}{k}$ زیر مجموعه k عضوی وجود دارد، پاسخ مطلوب عبارت است از

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

این نتیجه را می توان با نسبت دادن عدد ۰ یا ۱ به هریک از اعضای مجموعه نیز به دست آورد. به هر انتساب اعداد ، یک زیر مجموعه بطور یک به یک متناظر است که اعضای آن متشکل از اعضایی باشد که عدد ۱ به آن نسبت داده شده است. چون 2^n انتساب ممکن وجود دارد، نتیجه حاصل می شود.

توجه کنید زیر مجموعه ای که دارای ۰ عضو است (یعنی مجموعهٔ تهی) را نیز به حساب آورده ایم. بنابر این تعداد زیر مجموعه هایی که حداقل شامل یک عضو است برابر است با $2^n - 1$.

۵ - ضرایب چند جمله ای

در این بخش مسأله زیر را در نظر می گیریم: می خواهیم مجموعه ای مرکب از n عضو متمایز را به r گروه متمایز به ترتیب با حجمهای n_1 ، n_2 ، ... ، n_r تقسیم کنیم، که در آن $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. چند تقسیم مختلف امکان دارد؟ برای پاسخ به مسأله ، توجه داریم که برای گروه اول $\binom{n}{n_1}$ انتخاب ممکن وجود دارد، برای هر انتخاب گروه اول $\binom{n-n_1}{n_2}$ انتخاب ممکن برای گروه دوم وجود دارد، برای هر انتخاب دو گروه اول، $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ انتخاب ممکن برای گروه سوم وجود دارد؛ و به همین ترتیب الی آخر. بنابراین از اصل اساسی شمارش تعمیم یافته، به تعداد

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$$

$$= \frac{n!}{(n-n_1)!\,n_1!}\,\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!\,n_2!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{0!\,n_r!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

تقسیم ممکن وجود دارد.

نمادگذاری

اگر $n_1+n_2+\ldots+n_r=n$ آن گاه $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ را با

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

تعریف می کنیم . پس $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ تعداد تقسیمهای ممکن n شیٔ متمایز را به r گروه متمایز به ترتیب با حجمهای n_1 ، n_2 ، ... ، n_r ، نشان می دهد.

مثال ۵ الف. یک پاسگاه انتظامی در شهر کوچکی دارای ۱۰ پرسنل با درجهٔ افسری است . برنامهٔ تنظیمی پاسگاه به این صورت است که ۵ افسر در خیابانهای شهر گشت می زنند، ۲ افسر تمام وقت در پاسگاه کار می کنند و ۳ نفر از افسران جزو گروه ذخیره اند. چند تقسیم مختلف از این ۱۰ افسر به سه گروه ممکن است؟

حل : $\frac{10!}{5!\,2!\,3!}=2520$ تقسیم ممکن وجود دارد .

مثال ۵ ب. می خواهیم ۱۰ ورزشکار را به دو تیم A و B هریک شامل ۵ عضو تقسیم کنیم . تیم A در یک گروه ورزشی و تیم B در گروه دیگر بازی خواهد کرد . چند تقسیم مختلف وجود دارد؟

حل : $\frac{10!}{5!\,5!}=252$ تقسیم ممکن وجود دارد .

مثال ۵ پ. برای بازی بسکتبال ۱۰ ورزشکار در زمین بازی به دو تیم ۵ نفری تقسیم می شوند. چند تقسیم مختلف ممکن است؟

حل: توجه کنید که این مثال با مثال قبل متفاوت است، زیرا در اینجا ترتیب دو تیم در نظر گرفته نمی شود. یعنی تیم A و B ای وجود ندارد، بلکه تنها تقسیم به دو گروه ۵ نفری مورد نظر است . بنابراین پاسخ مطلوب عبارت است از

$$\frac{10!/5!\,5!}{2!}=126$$

اثبات قضیهٔ زیر که تعمیم قضیهٔ دو جمله ای است به عنوان تمرین واگذار می شود .

قضیه چند جمله ای

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, \ldots, n_r): \\ n_1 + \cdots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

یعنی، جمع بندی روی تمام بردارهای با مؤلفه های صحیح نا منفی $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ است بطوری که $n_1 + n_2 + \ldots + n_3 = n$. اعداد $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ ضرایب چند جمله ای نام دارند.

مثال ۵ت.

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3)^2 &= \binom{2}{2, 0, 0} x_1^2 x_2^0 x_3^0 + \binom{2}{0, 2, 0} x_1^0 x_2^2 x_3^0 \\ &+ \binom{2}{0, 0, 2} x_1^0 x_2^0 x_3^2 + \binom{2}{1, 1, 0} x_1^1 x_2^1 x_3^0 \\ &+ \binom{2}{1, 0, 1} x_1^1 x_2^0 x_3^1 + \binom{2}{0, 1, 1} x_1^0 x_2^1 x_3^1 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3\end{aligned}$$

۶- توزیع گلوله در کیسه ها

وقتی n گلوله متمایز را در r کیسه متمایز توزیع کنیم r^n برآمد ممکن وجود دارد، زیرا هر گلوله می تواند در هریک از r کیسه متمایز قرار گیرد. با وجود این، اکنون فرض کنید که n گلوله از یکدیگر متمایز نباشند. در این صورت چند برآمد مختلف امکان دارد؟ چون گلوله ها متمایز نیستند پس از آن نتیجه می شود که برآمد آزمایش توزیع n گلوله در r کیسه را می توان با بردار $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ توصیف کرد که در آن x_i تعداد گلوله هایی را که در کیسه i ام قرار دارد نشان می دهد. بنابراین مسأله به پیدا کردن تعداد بردارهای $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ که مؤلفه های آن مقادیر صحیح نا منفی هستند کاهش می یابد بطوری که

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

برای حل آن، با در نظر گرفتن تعداد جوابهای صحیح و مثبت آغاز می کنیم. برای این منظور فرض کنید که n شئ متمایز را ردیف کرده و می خواهیم آنها را به r گروه غیرتهی تقسیم کنیم.

o∧o∧o∧ ...∧o∧o

n شئ 0

r − 1 فاصلهٔ ∧ را انتخاب کنید .

شکل۱-۲

برای انجام این کار می توانیم $r - 1$ از $n - 1$ فاصله بین اشیاء مجاور را به عنوان نقاط تقسیم انتخاب کنیم (شکل ۱-۲). برای مثال، اگر $n = 8$ و $r = 3$ و ۲ مقسوم را به صورت زیر انتخاب کنیم.

ooo|ooo|oo

بردار حاصل برابر $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 2$ می شود. چون $\binom{n-1}{r-1}$ انتخاب ممکن وجود دارد، حکم زیر حاصل می شود

حکم ۶-۱

تعداد $\binom{n-1}{r-1}$ بردار $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ متمایز که مؤلفه های آنها اعداد صحیح و مثبت اند وجود دارد که در تساویهای

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n, \qquad x_i > 0, i = 1, \ldots, r$$

صدق می کند.

برای به دست آوردن تعدادجوابهای نامنفی (درمقابله باجوابهای مثبت)، توجه داشته باشید که تعداد جوابهای نامنفی $x_1 + x_2 + \ldots + x_r = n$ برابر با تعداد جوابهای مثبت $y_1 + y_2 + \ldots + y_r = n + r$ می باشد (از $y_i = x_i + 1$ ، $i = 1, \ldots, r$ ، نتیجه می شود). بنابراین از حکم ۶-۱ حکم زیر را به دست می آوریم.

حکم ۶-۲

تعداد $\binom{n+r-1}{n}$ بردار $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ متمایز که مؤلفه های آنها اعداد صحیح و

نامنفی هستند وجود دارد که در تساوی

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n \qquad (۱-۶)$$

صدق می کند.

مثال ۶ الف. چند جواب متمایز با مقادیر صحیح نا منفی برای $x_1 + x_2 = 3$ وجود دارد؟

حل: $4 = \binom{3+2-1}{3}$ جواب وجود دارد که عبارتنداز: $(0,3)$ ، $(1,2)$ ، $(2,1)$ ، $(3,0)$

مثال ۶ ب. سرمایه داری ۲۰ هزار دلار دارد که می خواهد در ۴ مورد سرمایه گذاری کند. هر سرمایه گذاری باید بر حسب واحد هزار دلار باشد. اگر تمام ۲۰ هزار دلار را سرمایه گذاری کند، چند طرح سرمایه گذاری مختلف امکان دارد؟ اگر کل پول برای سرمایه گذاری موردنظر نباشد چه می توان گفت؟

حل: اگر x_i ، $i = 1,2,3,4$ ، تعداد هزار دلاریهای سرمایه گذاری شده در مورد سرمایه گذاری i ام را نشان دهد در این صورت x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 اعداد صحیحی هستند که در

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20, \qquad x_i \geq 0$$

صدق می کنند. پس بنا به حکم ۶-۲ ، $1771 = \binom{23}{3}$ استراتژی سرمایه گذاری ممکن وجود دارد. اگر به سرمایه گذاری کل پول نیازی نباشد، مقدار پولی را که در ذخیره می ماند با x_5 نشان می دهیم، یک استراتژی عبارت از بردار $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ بامقادیر صحیح نامنفی است که در

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

صدق می کند.

بنابراین، بنا به حکم ۶-۲ ، اکنون $10,626 = \binom{24}{4}$ استراتژی ممکن وجود دارد.

مثال ۶ پ. در بسط عبارت چند جمله ای

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$$

چند جمله وجود دارد؟

حل:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, \ldots, n_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}$$

که در آن جمع بندی روی کلیه مقادیر صحیح نا منفی $(n_1, \ldots, n_r)$ است، بطوری که $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ بنابراین، به موجب حکم ۶-۲، $\binom{n+r-1}{n}$ از این جمله ها وجود دارد.

مثال ۶ ت. مثال ۴پ را دوباره در نظر می گیریم. در این مثال، مجموعه ای مرکب از n قلم داریم که از آنها m قلم (غیر متمایز و) معیوب و n - m قلم باقیمانده (نیز غیر متمایز و) سالم است. هدف ما تعیین تعداد ترتیبهای خطی است بطوری که هیچ دو قلم معیوب پهلوی هم قرار نگیرند. برای تعیین این مقدار تصور می کنیم که اقلام معیوب باهم ردیف شده اند و اقلام سالم را باید در بین آنها قرار دهیم. فرض کنید x_1 تعداد اقلام سالم در سمت چپ اولین قلم معیوب، x_2 تعداد اقلام سالم بین اولین دو قلم معیوب را نشان می دهد و به همین ترتیب الی آخر. یعنی بطور نمادی، داریم

$$x_1 \varnothing x_2 \varnothing \cdots x_m \varnothing x_{m+1}$$

اکنون بین هر زوج معیوب، مادامی که $x_i > 0$ ، $i = 2, \ldots, m$، لااقل یک قلم سالم وجود دارد. پس تعداد برآمدهایی که در شرط صدق کند برابر تعداد بردارهای $x_1, \ldots, x_{m+1}$ است که در

$$x_1 + \cdots + x_{m+1} = n - m \qquad x_1 \geq 0, x_{m+1} \geq 0, x_i > 0, i = 2, \ldots, m$$

صدق می کند. با قراردادن

$$y_1 = x_1 + 1, y_i = x_i, i = 2, \ldots, m, y_{m+1} = x_{m+1} + 1$$

مشاهده می کنیم که این تعداد برابر تعداد بردارهای مثبت $(y_1, \ldots, y_{m+1})$ است که در

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{m+1} = n - m + 2$$

صدق می کند. پس بنا به حکم ۶-۱، $\binom{n-m+1}{m}$ برآمد وجود دارد که با نتایج مثال ۴پ مطابقت دارد.

اکنون فرض کنید که به تعداد برآمدهایی توجه داریم که هر زوج از اقلام معیوب حداقل با ۲ قلم سالم از هم جدا شده باشند با استدلالی نظیر آنچه در بالا به کار بردیم، این مقدار برابر تعداد بردارهایی است که در

$$x_1 + \cdots + x_{m+1} = n - m \qquad x_1 \geq 0, x_{m+1} \geq 0, x_i \geq 2, i = 2, \ldots, m$$

صدق می کند، با قراردادن

$$y_1 = x_1 + 1,\ y_i = x_i - 1,\ i = 2, \dots, m,\ y_{m+1} = x_{m+1} + 1$$

در می یابیم که این مقدار همان تعداد جوابهای مثبت

$$y_1 + \cdots + y_{m+1} = n - 2m + 3$$

است، پس از حکم ۶-۱، $\binom{n-2m+2}{m}$ از این برآمدها وجود دارد.

تمرینهای نظری

۱- صورت تعمیم یافتهٔ اصل اساسی، شمارش را ثابت کنید.

۲- دو آزمایش قرار است انجام شود. اولی می تواند به هریک از n برآمد ممکن منجر شود. اگر آزمایش اول به نتیجهٔ شماره i منتهی شود، آن گاه آزمایش دوم می تواند به هریک از n_i برآمد ممکن منتهی شود $i = 1,2, \dots, m$. تعداد برآمدهای ممکن دو آزمایش چندتاست؟

۳- r شئ از مجموعهٔ n شئ را به چند راه می توان انتخاب کرد در صورتی که ترتیب انتخاب در نظر گرفته شود؟

۴- توضیحی ترکیبی برای تساوی $\binom{n}{r}$ با $\binom{n}{n-r}$ ارائه دهید.

۵- از n گلوله که r تا سیاه و n - r تا سفید است $\binom{n}{r}$ جایگشت وجود دارد. توضیحی ترکیبی برای این حقیقت ارائه دهید.

۶ - اثباتی تحلیلی از معادلهٔ (۴-۱) ارائه دهید.

۷ - ثابت کنید

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

که در آن $r \le n, \quad r \le m$

راهنمایی: گروهی مرکب از n مرد و m زن در نظر بگیرید. چند گروه با حجم r ممکن است؟

۸- تحقیق کنید که برای $n > 4$

$$\binom{n+1}{4} = \frac{\binom{\binom{n}{2}}{2}}{3}$$

اکنون دلیلی ترکیبی برای تساوی بالا ارائه دهید.

راهنمایی : گروهی مرکب از n+1 قلم را در نظر بگیرید که یکی از آنها ویژه است. ثابت کنید که هر دو طرف اتحاد بالا، تعداد زیر مجموعه های با حجم ۴ را نشان می دهند.

۹- توضیحی ترکیبی برای $\binom{n}{r} = \binom{n}{r,\, n-r}$ ارائه دهید.

۱۰- ثابت کنید

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \binom{n-1}{n_1 - 1, n_2, \ldots, n_r} + \binom{n-1}{n_1, n_2 - 1, \ldots, n_r} + \cdots + \binom{n-1}{n_1, n_2, \ldots, n_r - 1}$$

۱۱- قضیهٔ چند جمله ای را ثابت کنید.

۱۲- نشان دهید که برای $n > 0$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\binom{n}{i} = 0$$

۱۳- (الف) اتحاد ترکیبی زیر را به استقراء ثابت کنید

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

(ب) با در نظر گرفتن مجموعه ای مرکب از n فردو تعیین تعداد انتخابهای ممکن یک کمیته و یک رئیس کمیته، به دو راه، دلیلی ترکیبی برای رابطه بالا ارائه دهید.

(پ) درستی اتحاد زیر را برای $n = 1,2,3,4$ تحقیق کنید :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 = 2^{n-2} n(n+1)$$

برای اثبات ترکیبی رابطه بالا مجموعه ای مرکب از m فرد را در نظر گرفته و نشان دهید که هر دو طرف اتحاد بالاتعداد انتخابهای مختلف یک کمیته، رئیس و منشی (که احتمالاً با رئیس یکی است) آن را نشان می دهد.

راهنمایی : ۱ - چند انتخاب مختلف ممکن است به کمیته ای که دقیقاً شامل k فرد است منتهی شود؟

۲- چند انتخاب مختلف ممکن که در آنها رئیس و منشی یکسان است، وجود

دارد؟ (پاسخ : $n2^{n-1}$).

۳- چند انتخاب مختلف ممکن به رئیس و منشی متفاوت منتهی می شود ؟

(ت) اکنون ثابت کنید

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^3 = 2^{n-3} n^2 (n+3)$$

۱۴ - n گلولهٔ غیر متمایز به چند راه در r کیسه، بطوری که کیسه i م شامل حداقل m_i گلوله باشد، توزیع می شود؟ فرض کنید

$$n \geq \sum_{i=1}^{r} m_i$$

پاسخ :

$$\binom{n - \sum m_i + r - 1}{n - \sum m_i}$$

۱۵- نشان دهید

$$\binom{n+r-1}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i+r-2}{n-i}$$

راهنمایی : از حکم ۶-۲ استفاده کنید.

۱۶- ثابت کنید دقیقاً $\binom{r}{k}\binom{n-1}{n-r+k}$ جواب برای $x_1 + x_2 + \ldots + x_r = m$ وجود دارد که برای آنها دقیقاً k تا از x ها برابر 0 است.

۱۷- تابع n متغیّری $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را در نظر بگیرید. چند مشتق جزئی مرتبه r ام مختلف وجود دارد؟

۱۸- با استفاده از تمرین نظری ۷ ثابت کنید

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

۱۹- (الف) با استفاده از استقرای ریاضی و اتحاد ترکیبی

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$$

اتحاد زیر را ثابت کنید

$$\binom{n+r}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+r-1}{j}$$

(ب) با این استدلال که هردو طرف تساوی بالا تعداد جوابهای صحیح نا منفی متمایز

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r \leq n$$

است، اثبات دومی ارائه دهید.

۲۰- می خواهیم از مجموعهٔ n عضوی کمیته ای با حجم j و از این کمیته نیز زیر کمیته ای با حجم i ، $i<j$ ، انتخاب کنیم.

(الف) با محاسبهٔ تعداد انتخابهای ممکن این کمیته و زیر کمیته، به دو راه ، اتحادی ترکیبی به دست آورید ـ اولاً فرض کنید که ابتدا کمیته و سپس زیر کمیته انتخاب می شود، ثانیاً فرض کنید که ابتدا زیر کمیته و سپس بقیهٔ اعضای کمیته انتخاب می شوند.

(ب) با استفاده از (الف) ، اتحاد ترکیبی زیر را ثابت کنید:

$$\sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{i} = \binom{n}{i}2^{n-i}, \qquad i \leq n$$

(پ) با استفاده از (الف) و تمرین نظری ۱۲ ، نشان دهید

$$\sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{i}(-1)^{n-j} = 0, \qquad i \leq n$$

مسائل

۱- (الف) چند پلاك نمره اتومبیل با ۷ علامت مختلف ممکن است اگر دو علامت اول از حروف و ۵ علامت دیگر از اعداد ترکیب شده باشد.

(ب) با این فرض که هیچ حرف یا عددی در یک پلاك تکی نمی تواند تکرار شود (الف) را تکرار کنید.

۲- یک گروه نوازنده چهار نفری، با ۴ آلت موسیقی باهم همکاری دارند. اگر هریک از این افراد چهار آلت موسیقی را بتوانند بنوازند، چند آرایش مختلف ممکن است؟ اگر دو نفر آنها هر چهار آلت موسیقی ولی دو نفر دیگر هریک تنها پیانو و طبل بنوازند، چند آرایش مختلف امکان دارد؟

۳- اگر ۴ آمریکایی، ۳ فرانسوی و ۳ انگلیسی بخواهند در یک ردیف بنشینند، چند آرایش برای این نشست ممکن است اگر قرار باشد که افراد با ملیت یکسان در پهلوی هم قرار گیرند.

۴- (الف) به چند راه سه دختر و سه پسر می توانند در یک رَدیف بنشینند؟

(ب) به چند راه سه دختر و سه پسر می توانند در یک ردیف بنشینند، اگر قرار باشد که پسران باهم و دختران هم با هم، باشند؟

(پ) اگر فقط پسران ملزم به نشستن پهلوی یکدیگر باشند، چند راه وجود دارد؟

(ت) اگر هیچ دو نفر همجنس مجاز به نشستن پهلوی یکدیگر نباشند، چند راه وجود دارد؟

۵- چند آرایش مختلف می توان از حروف زیر ساخت؟

(الف) FLUKE، (ب) PROPOSE، (پ) MISSISSIPPI، (ت) ARRANGE !

۶- کودکی ۱۲ مکعب چوبی دارد که ۶ عدد آن سیاه، ۴ عدد قرمز، ۱ عدد سفید و ۱ عدد آبی است. اگر این کودك مکعبها را در یک ردیف بچینند، چند آرایش ممکن وجود دارد؟

۷- هشت نفر به چند راه می توانند در یک ردیف بنشینند اگر

(الف) هیچ قیدی در ترتیب نشستن وجود نداشته باشد،

(ب) دو فرد A و B ملزم به نشستن پهلوی هم باشند.

(پ) اگر ۴ مرد و ۴ زن باشند و هیچ دو مرد یا دو زن نتوانند پهلوی هم بنشینند.

(ت) ۵ مرد وجود داشته باشد و ملزم به نشستن پهلوی هم باشند.

(ث) ۴ زوج زن و شوهر باشند و هر زوجی ملزم به نشستن پهلوی هم باشند؟

۸- سه کتاب داستان ۲ کتاب ریاضی و ۱ کتاب شیمی را به چند راه در یک قفسه می توان چید اگر

(الف) کتابها را با هر ترتیب دلخواهی بتوان چید.

(ب) قرار باشد کتابهای ریاضی باهم و کتابهای داستان هم با هم باشند.

(پ) کتابهای داستان پهلوی هم، ولی کتابهای دیگر آرایش دلخواهی داشته باشند.

۹- از باشگاهی مرکب از ۱۰ عضو، باید یک رئیس، خزانه دار و منشی که متفاوتند انتخاب کنیم. چند انتخاب مختلف از این افراد ممکن است اگر

(الف) هیچ قیدی وجود نداشته باشد.

(ب) A و B باهم نباشند.

(پ) C و D با هم باشند یا باهم نباشند.

(ت) عضو E حتماً جزو این سه نفر باشد

(ث) عضو F رئیس باشد.

۱۰- قرار است پنج جایزهٔ جداگانه (عالی، خیلی خوب و الی آخر) به دانشجویان منتخب از

یک کلاس ۳۰ نفری اعطا شود. چند برآمد مختلف ممکن است اگر
(الف) یک دانشجو بتواند هر تعدادی از جایزه ها را دریافت کند؟
(ب) هر دانشجو بتواند حداکثر یک جایزه دریافت کند؟

۱۱- در بازی پوکر چند دست کارت ۵ تایی وجود دارد؟

۱۲- می خواهیم کمیته ای ۷ نفری مرکب از ۲ جمهوری خواه ، ۳ دمکرات و ۳ استقلال طلب از یک گروه شامل ۵ جمهوری خواه ، ۶ دمکرات و ۴ استقلال طلب هستند تشکیل دهیم. چند کمیته امکان دارد؟

۱۳- دانشجویی باید به ۷ سؤال از ۱۰ سؤال در امتحانی پاسخ دهد. چندانتخاب برای وی وجود دارد؟ در صورتی که باید لااقل به ۳ سؤال از ۵ سؤال اول پاسخ دهد، چند انتخاب ممکن است؟

۱۴- خانمی ۸ دوست دارد که ۵ نفر از آنها را می خواهد به مهمانی دعوت کند. اگر دو نفر از دوستان وی باهم قهر و مایل به شرکت همزمان در مهمانی نباشند، چند انتخاب برای او امکان دارد؟ در صورتی که فقط دو نفر از دوستانش مایل به شرکت همزمان در مهمانی باشند، چند انتخاب ممکن است؟

۱۵- یک آزمایشگاه روان شناسی که در آن تحقیقی در مورد خواب دیدن در حال انجام است . شامل سه اتاق هریک با دو تختخواب است. اگر بخواهیم سه مجموعه از دوقلوهای یکسان را به این ۶ تختخواب نسبت دهیم بطوری که هر مجموعه از دو قلوها در تختخوابهای مختلف ولی در یک اتاق بخوابند، چند انتساب مختلف امکان دارد؟

۱۶- $(3x^2 + y)^5$ را بسط دهید.

۱۷- بازی بریج با ۴ بازیکن انجام می شود، که هریک از آنها ۱۳ کارت دارد. چند نوع تقسیم امکان پذیر است.

۱۸- $(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^4$ را بسط دهید.

۱۹- اگر بخواهیم ۱۲ نفر را به سه کمیته که تعداد اعضای آنها به ترتیب ۳، ۴ و ۵ نفرند تقسیم کنیم، چند تقسیم مختلف امکان دارد؟

۲۰- پدری می خواهد ۷ هدیه را بین سه فرزند خود تقسیم کند بطوری که بزرگترین آنها سه هدیه و دو فرزند دیگر هریک ۲ هدیه دریافت کنند. به چند راه امکان پذیر است؟

۲۱- ۸ تخته سیاه یکسان قرار است بین ۴ دبستان توزیع شود، چند حالت امکان دارد؟ اگر

هر مدرسه باید حداقل یک تخته سیاه دریافت کند، چند حالت ممکن است؟

۲۲- اگر قرار باشد ۸ نفر معلم جدید به ۴ مدرسه داده شود، چند حالت امکان دارد؟ اگر هرمدرسه دو معلم را بپذیرد، چند حالت امکان دارد؟

۲۳- آسانسوری با ۸ نفر از طبقهٔ زیر زمین شروع به حرکت می کند (بدون در نظر گرفتن مأمور آسانسور) و تا زمانی که به طبقهٔ ششم می رسد همه را پیاده می کند. این مأمور به چند طریق می تواند افرادی که آسانسور را ترک می کنند مشاهده کند، در صورتی که کلیه افراد به نظر وی یکسان باشند؟ و اگر این ۸ نفر از ۵ مرد و ۳ زن تشکیل شده باشند و این مأمور قادر به تمیز مرد از زن باشد به چند طریق امکان دارد؟

۲۴- یک مجموعهٔ آثار هنری شامل ۴ اثر از دالی، ۵ اثر از وان گوگ و ۶ اثر از پیکاسو حراج شده است. در این حراج ۵ عتیقه دار حاضرند. گزارشگر صفحه اجتماعی تنها تعداد آثار هنری هریک از سه هنرمند را که توسط عتیقه دار خریداری شد، مشاهده کرد. اگر همهٔ آن آثار به فروش رفته باشد، این گزارشگر چند نتیجه مختلف ممکن است ثبت کرده باشد؟

۲۵- ده وزنه بردار در یک مسابقه وزنه برداری با هم رقابت می کنند. از این وزنه برداران، ۳نفر امریکایی، ۴ نفر روسی، ۲ نفر چینی و ۱ نفر کانادائی است. اگر در امتیاز بندی تنها کشورهای شرکت کنندگان و نه خود آنان در نظر گرفته شوند، چند حالت مختلف از نظر امتیازها امکان دارد؟ چند حالت ممکن به نتایجی که در کشور امریکا یک شرکت کننده در ردیف بالاتر از ۳ و ۲ شرکت کننده پایینتر از ۳ داشته باشد، متناظر است؟

۲۶- هیأتهایی از ۱۰ کشور، از جمله روسیه، فرانسه، انگلستان و امریکا قرار است در یک ردیف بنشینند. اگر قرار باشد هیأتهای فرانسوی و انگلیسی در پهلوی یکدیگر بنشینند و هیأتهای روسی و امریکایی پهلوی هم نباشند، چندآرایش مختلف برای نشستن امکان دارد؟

۲۷- ۲۰ هزار دلار سرمایه داریم که باید در ۴ موقعیت ممکن سرمایه گذاری شود. هر سرمایه گذاری باید با تقریب یک واحد گرد شود(یک هزار دلار)، و در سرمایه گذاری حداقلی نیز وجود دارد که لازم است در صورت سرمایه گذاری در این موقعیتها رعایت شود. سرمایه گذاریهای حداقل ۲، ۲، ۳، و ۴ هزار دلار می باشد. چند راه سرمایه گذاری مختلف موجود است اگر

(الف) در هر موقعیت یک سرمایه گذاری صورت گیرد.

(ب) در حداقل ۳ تا از ۴ موقعیت سرمایه گذاری صورت گیرد.

فصل دوم

اصول احتمال

۱ - مقدمه

دراین فصل ابتدا مفهوم احتمال یک پیشامد را معرفی می کنیم و سپس طرز محاسبه این احتمالها را در بعضی حالات نشان می دهیم. ولی به عنوان مقدمه به بیان مفهوم فضای نمونه و پیشامدهای یک آزمایش می پردازیم.

۲ - فضای نمونه و پیشامدها

آزمایشی را در نظر بگیریدکه برآمدهای آن بطور قطع از قبل قابل پیش بینی نباشد. اگرچه برآمد آزمایش از قبل معلوم نیست ولی فرض می کنیم مجموعهٔ تمام برآمدهای ممکن معلوم باشد. این مجموعه را **فضای نمونه** آزمایش گویند و آن را با S نشان می دهند. برای روشن شدن مطلب به چند مثال زیر توجه کنید:

۱ - اگر برآمد یک آزمایش تعیین جنس یک نوزاد باشد، آن گاه

$$S = \{g, b\}$$

که در آن g به معنای نوزاد دختر و b به معنای نوزاد پسر است.

۲ - اگر برآمد یک آزمایش ترتیب برنده شدن ۷ اسب در یک مسابقه باشد که در محلهای

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 قرار گرفته اند، آن گاه

$S = \{(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ تمام !۷ جایگشت$)\}$

مثلاً برآمد $(2, 3, 1, 6, 5, 4, 7)$ به این معناست که اسب شماره ۲ اول شده است بعد از آن اسب شماره ۳ و سپس اسب شماره ۱ و الی آخر.

۳- اگر آزمایش، پرتاب دو سکه باشد، آن گاه فضای نمونه عبارت است از

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

اگر دوسکه شیر بیاید برآمد (H , H) است و اگر اولی شیردومی خط بیاید برآمد (H , T) و اگر اولی خط و دومی شیر بیاید برآمد (T,H) و بالاخره اگر هردوخط بیاید برآمد (T, T) خواهد بود.

۴- اگر آزمایش، پرتاب دو تاس باشد، آن گاه فضای نمونه شامل ۳۶ نقطه است

$$S = \{(i, j) \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

که در آن (i , j) وقتی رخ می دهد که تاس اول i و دیگری j آمده باشد.

۵ - اگر آزمایش طول عمر (به ساعت) یک ترانزیستور باشد، آن گاه فضای نمونه شامل تمام اعداد حقیقی نا منفی است؛ یعنی

$$S = \{x: 0 \le x < \infty\}$$

هر زیر مجموعهٔ E از فضای نمونه را یک **پیشامد** گوییم. یعنی یک پیشامد مجموعه ای از برآمدهای ممکن آزمایش است. اگر برآمد آزمایش در E باشد، می گوییم پیشامد E رخ داده است. برای روشن شدن مطلب به چند نمونهٔ زیر از پیشامدها توجه کنید.

در مثال ۱، اگر $E = \{g\}$ ، آن گاه E پیشامد «نوزاد دختر است»، می باشد، همین طور اگر $F = \{b\}$ ، آن گاه F پیشامد «نوزاد دختر است» ، می باشد. در مثال ۲، اگر

E = { تمام برآمدهای S که با ۳ شروع می شوند }

آن گاه E پیشامد «اسب شماره ۳ مسابقه را می برد» می باشد.

در مثال ۳، اگر $E = \{(H,H), (H,T)\}$ ، آن گاه E پیشامد «سکه اول شیر می آید» می باشد.

در مثال ۴، اگر $E = \{ (1,6) , (2,5), (3,4),(4,3), (5,2) ,(6,1) \}$ ، آن گاه، E پیشامد «مجموع تاسها برابر ۷ است» می باشد.

در مثال ۵، اگر $E = \{ x : 0 < x < 5\}$ ، آن گاه E پیشامد «طول عمر ترانزیستور از ۵ ساعت بیشتر نیست» می باشد.

برای هردو پیشامد E و F در یک فضای نمونهٔ S ، پیشامد جدید $E \cup F$ شامل تمام برآمدهایی است که در E یا در F یا در هر دو باشند.

یعنی پیشامد $E \cup F$ وقتی رخ می دهد که E **یا** F رخ دهد. مثلاً درمثال ۱ اگر $E = \{g\}$ و $F = \{ b \}$ ، آن گاه

$$E \cup F = \{g, b\}$$

یعنی $E \cup F$ تمام فضای نمونهٔ S است. در مثال ۳، اگر $E = \{ (H H) , (H,T)\}$ و $F= \{(T, H)\}$ ، آن گاه

$$E \cup F = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}$$

پس $E \cup F$ وقتی رخ می دهد که یکی از سکه ها شیر بیاید.

پیشامد $E \cup F$ را **اجتماع** پیشامد E و F گویند

همین طور از هردو پیشامد E و F یک پیشامد جدید EF تعریف می شود به نام **اشتراك** E و F ، و آن شامل تمام برآمدهایی است که در هردو پیشامد E و F باشند. یعنی ، پیشامدEF فقط وقتی رخ می دهد که هردو پیشامد E و F رخ دهند. مثلاً، در مثال ۳، اگر $E =\{(H, H) , (H, T) , (T, H)\}$ پیشامد حداقل یک شیر و $F =\{(H,T) , (T, H) , (T, T)\}$ پیشامد حداقل یک خط باشد، آن گاه

$$EF = \{(H, T), (T, H)\}$$

پیشامد یک شیر و یک خط خواهد بود. در مثال ۴ اگر

$$E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

پیشامد مجموع ۷ و

$$F = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

پیشامد مجموع ۶ باشد، آن گاه پیشامد EF شامل هیچ برآمدی نخواهد بود و در نتیجه نمی تواند رخ دهد. این پیشامد را به $\varnothing$ نشان می دهیم و آن را پیشامدتهی یا پوچ گوئیم (یعنی، $\varnothing$ پیشامدی است که شامل هیچ برآمدی نباشد). اگر $EF = \varnothing$ ، آن گاه E و F را جدا یا **ناسازگار** نامند.

اجتماع و اشتراک بیش از دو پیشامد را نیز می توان به صورتی مشابه تعریف کرد. اگر E_1، E_2، . . . پیشامد باشند، اجتماع این پیشامدها که آن را با $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ نشان می دهیم پیشامدی است که نقاط آن حداقل به یک E_n ، $n = 1, 2, \ldots$ متعلق باشد. همین طور اشتراک پیشامدهای E_n که آن را با $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ نشان می دهیم پیشامدی است که نقاط آن به همهٔ E_n ها، $n = 1,2,\ldots$ متعلق باشد.

بالاخره برای هر پیشامد E پیشامد جدید E^c را تعریف می کنیم و آن را مکمل E گوییم، این پیشامد شامل تمام نقاط فضای نمونه است که در E نیستند. یعنی E^c فقط و فقط وقتی رخ می دهد که E رخ نداده باشد. در مثال ۴، اگر $E =\{ (1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ ، آنگاه، E وقتی رخ می دهد که مجموع دو تاس برابر ۷ باشد. همچنین توجه کنید که چون نتیجه آزمایش باید به یک برآمد منتهی شود پس داریم $S^c = \varnothing$.

برای هر دو پیشامد E و F ، اگر تمام نقاط E در F نیز باشند، آن گاه E را زیر مجموعه F گوییم و می نویسیم $E \subset F$ (یا بطور معادل $F \supset E$). پس اگر $E \subset F$ ، رخ دادن E لزوماً رخ دادن F را ایجاب می کند. اگر $E \subset F$ و $F \subset E$ ، پیشامدهای E و F را برابر گوییم و می نویسیم $E = F$.

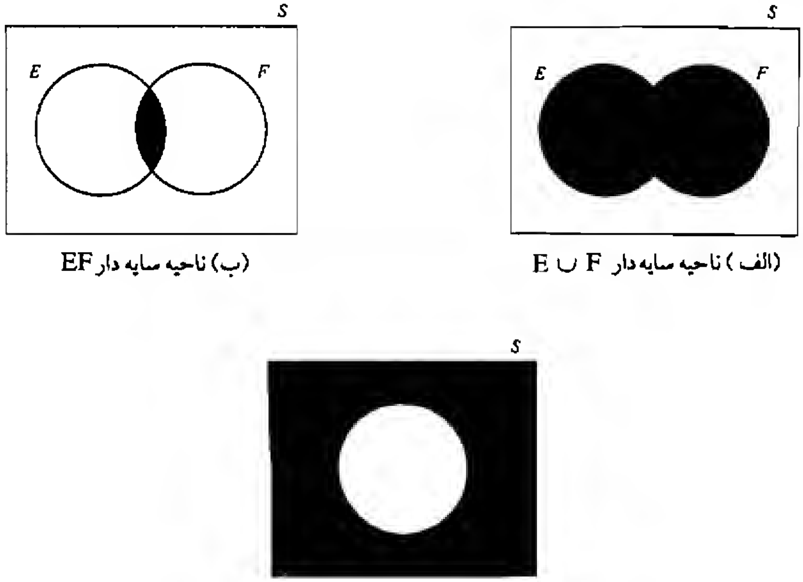
یک نمایش تصویری که برای روشن شدن روابط منطقی بین پیشامدها بسیار مفید است، نمودار وِن می باشد. فضای S به وسیلهٔ تمام نقاط یک مستطیل بزرگ، و پیشامدهای E، F، G، . . . به صورت تمام نقاط مفروض در دایره های داخل این مستطیل نشان داده می شود. در این صورت پیشامدهای مورد توجه را می توان با سایه زدن نواحی مناسب مشخص نمود. مثلاً، در سه تصویر ون شکل ۲-۱ ناحیه های سایه دار به ترتیب پیشامدهای $E \cup F$ ، $E \cap F$ و E^c را نشان می دهند. تصویر ون در شکل ۲-۲ نشان می دهد که $E \cap F$.

اعمال تشکیل اجتماع اشتراک، و مکمل پیشامدها از قواعدی پیروی می کنند که با قواعد جبری تفاوت زیادی ندارند. بعضی از این قواعد را در زیر فهرست می کنیم .

قانون جابجایی $EF = FE$ و $E \cup F = F \cup E$

قانون شرکت پذیری $(EF)G = E(FG)$ و $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$

قانون پخشی $EF \cup G = (E \cup G)(F \cup G)$ و $(E \cup F)G = EG \cup FG$

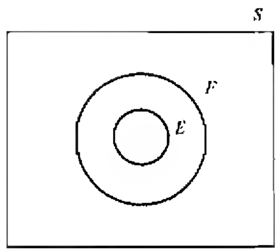


(الف) ناحیه سایه‌دار $E \cup F$

(ب) ناحیه سایه‌دار EF

(پ) ناحیه سایه‌دار E^c

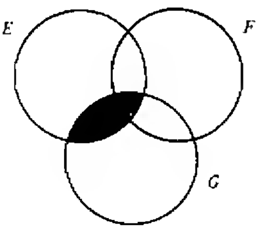
شکل ۲-۱



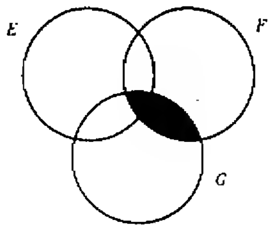
$E \subset F$

شکل ۲-۲

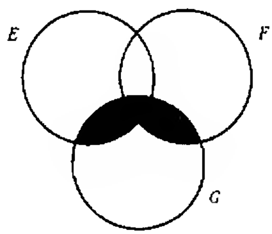
این روابط را می توان ثابت کرد، به این ترتیب که نشان دهیم هر برآمد که در پیشامد سمت چپ تساوی است به پیشامد سمت راست نیز متعلق است و برعکس. یک راه نشان دادن این مطلب به کمک تصویر ون است. مثلاً قانون پخشی را می توان به وسیلهٔ دنبالهٔ تصاویر شکل ۲-۳ تحقیق کرد.



(الف) ناحیه سایه دار EG



(ب) ناحیه سایه دار FG



(پ) ناحیه سایه دار $(E \cup F)\, G$

$(E \cup F)\, G = EG \cup FG$

شکل ۲-۳

روابط مفید زیر بین سه عمل اصلی اجتماع، اشتراک و مکمل **به قوانین دمورگان** معروف است.

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$$

برای اثبات قوانین دمورگان، ابتدا فرض کنید x یک نقطه $\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c$ باشد.

در این صورت x به $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ متعلق نیست، یعنی x در هیچ کدام از پیشامدهای E_n ، ... $i = 1, 2,$

نیست، در نتیجه x در تمام E_i^c ها $i = 1,\ldots, n$ خواهد بود. پس x به $\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$ متعلق است. از طرف دیگر فرض کنید x نقطه ای از $\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$ باشد. در این صورت x به E_i^c به ازای $i = 1,\ldots n$ متعلق است، یعنی x در $\bigcup_{1}^{n} E_i$ نخواهد بود پس به $\left(\bigcup_{1}^{n} E_i\right)^c$ متعلق است. به این ترتیب اولین قانون دمورگان ثابت می شود.

برای اثبات قانون دوم از قانون اول استفاده می کنیم.

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (E_i^c)^c$$

و چون $E = {(E^c)}^c$، می توان نوشت

$$\left(\bigcup_{1}^{n} E_i^c\right)^c = \bigcap_{1}^{n} E_i$$

اگر از طرفین مکمل بگیریم نتیجه حاصل می شود، یعنی

$$\bigcup_{1}^{n} E_i^c = \left(\bigcap_{1}^{n} E_i\right)^c$$

۳- اصول احتمال

یک راه ممکن تعریف احتمال یک پیشامد، استفاده از فراوانی نسبی است. این تعریف معمولاً به صورت زیر است: فرض کنید یک آزمایش که فضای نمونهٔ آن S است، با شرایطی یکسان تکرار می شود. برای هر پیشامد E از این فضای نمونهٔ S، تعداد دفعاتی را که در n تکرار اول آزمایش، پیشامد E رخ می دهد با $n(E)$ نشان می دهیم. سپس $P(E)$، احتمال پیشامد E به صورت زیر تعریف می شود

$$P(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(E)}{n}$$

یعنی، $P(E)$ به صورت درصد (حدی) دفعاتی که پیشامد E رخ می دهد تعریف می شود. در این تعریف، احتمال حد فراوانی نسبی پیشامد E است.

هرچند تعریف فوق از نظر شهودی رضایت بخش است و باید خواننده همواره به خاطر

بسپارد، ولی دارای یک اشکال جدی است: چگونه بدانیم که $\frac{n(E)}{n}$ به عددی ثابت به وسیلهٔ هر دنباله از تکرارهای آزمایش میل می کند؟ مثلاً، فرض کنید آزمایش تکراری پرتاب یک سکه باشد. چگونه بدانیم که نسبت شیرهای به دست آمده در n پرتاب اول وقتی n بزرگ می شود به سمت عدد معینی میل می کند؟ همچنین با فرض این که این دنباله به عدد معینی همگرا باشد چگونه بدانیم که در تکرارهای بعدی بازهم به همان نسبت از شیرها خواهیم رسید؟

طرفداران تعریف فراوانی نسبی احتمال، معمولاً به این اعتراض چنین پاسخ می دهند که همگرایی $\frac{n(E)}{n}$ به یک مقدار ثابت یک فرض یا یک **اصل** سیستم است. در هر صورت فرض همگرایی $\frac{n(E)}{n}$ به یک مقدار ثابت یک فرض خیلی پیچیده به نظر می رسد. زیرا، با وجود این که باید امیدوار بود که چنین حدی ثابتی وجود دارد، به هیچ وجه از قبل روشن نیست که این حالت پیش آید. آیا به نظر معقولتر نمی رسد که مجموعه ای از اصول ساده تر و نسبتاً بدیهی را در مورد احتمال فرض بگیریم و سپس سعی کنیم وجود چنین حد ثابتی را به شکلی اثبات کنیم؟ شیوهٔ اخیر روش اصول موضوع جدید نظریه احتمال است که در این کتاب پذیرفته شده است. بخصوص فرض می کنیم که برای هر پیشامد E در فضای نمونهٔ S مقداری مانند P(E) وجود دارد که به آن احتمال E گوییم. سپس فرض می کنیم که این احتمالها در مجموعهٔ معینی از اصول صدق می کنند، با این امید که خواننده پذیرفته باشد که این اصول بر مبنای مفهوم شهودی احتمال است.

آزمایشی را در نظر بگیرید که فضای نمونهٔ آن S است. برای هر پیشامد E از این فضای نمونهٔ S، فرض می کنیم که عددی مانند P(E) وجود دارد که در سه اصل زیر صدق می کند:

اصل ۱

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

اصل ۲

$$P(S) = 1$$

اصل ۳

برای هر دنباله از پیشامدهای دو به دو ناسازگار E_1، E_2، ... (یعنی پیشامدهایی که به ازای $i \neq j$ ، $E_i E_j = \phi$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

بنا به تعریف ، P(E) را احتمال پیشامد E گوییم .

پس اصل (۱) بیان می کند که احتمال این که برآمد آزمایش نقطه ای از E باشد عددی بین 0 و ۱ است . اصل (۲) بیان می کند که با احتمال ۱ ، برآمد یک نقطه فضای نمونهٔ S خواهد بود . اصل (۳) بیان می کند که برای هر دنباله از پیشامدهای ناسازگار احتمال این که حداقل یک از این پیشامدها رخ دهد دقیقاً برابر است با مجموع احتمالهای متناظر آنها .

اگر دنبالهٔ E_1 ، E_2 ، . . . را در نظر بگیریم به قسمی که $E_1 = S$ و برای $i > ۱$ و $E_i = \phi$ آن گاه چون پیشامدها دو به دو ناسازگارند و داریم $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ، از اصل (۳) نتیجه می شود که

$$P(S) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\varnothing)$$

یا

$$P(\varnothing)=0$$

یعنی احتمال رخ دادن پیشامد تهی برابر 0 است .

همچنین باید توجه داشت که برای هر دنباله متناهی از پیشامدهای دو به دو ناسازگار E_1، E_2 . . . ، E_n

$$P\left(\bigcup_{1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \qquad (۳-۱)$$

این تساوی از اصل (۳) با تعریف E_i ، $i > n$ برابر پیشامد تهی به دست می آید . اصل (۳) با معادلهٔ (۱-۳) وقتی فضای نمونه متناهی باشد معادل است (چرا؟) . با وجود این تعمیم اصل (۳) وقتی لازم می شود که فضای نمونه دارای بی نهایت نقطه باشد .

مثال ۳ الف . اگر آزمایش پرتاب یک سکه باشد و فرض کنیم آمدن شیر یا خط یکسان باشد ، در این صورت داریم

$$P(\{H\}) = P(\{T\}) = \tfrac{1}{2}$$

از طرف دیگر ، اگر سکه اریب باشد و احساس کنیم که احتمال آمدن شیر دو برابر آمدن خط است ، آن گاه

$$P(\{H\}) = \tfrac{2}{3} \qquad P(\{T\}) = \tfrac{1}{3}$$

مثال ۳ ب. اگر تاسی را بیندازیم و فرض کنیم که تمام ۶ وجه آن همشانس باشند، آن گاه داریم

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \tfrac{1}{6}.$$

از اصل (۳) نتیجه می شود که احتمال آمدن یک عدد زوج برابر است با

$$P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \tfrac{1}{2}$$

فرض وجود یک تابع مجموعه ای مانند P ، که بر پیشامدهای یک فضای نمونهٔ S تعریف شده است و در اصول ۱ ،۲ و۳ صدق می کند ، رهیافت جدید ریاضی ، نظریه احتمال را می سازد. انتظار می رود که خواننده با این اصول طبیعی و با مفهوم شهودی احتمال که با شانس و تصادف در ارتباط است موافق باشد. علاوه بر این با استفاده از این اصول می توانیم ثابت کنیم که اگر یک آزمایش مرتباً تکرار شود آن گاه، با احتمال ۱ نسبت دفعاتی که یک پیشامد خاص E رخ می دهد برابر P(E) خواهد بود. این نتیجه به نام **قانون قوی اعداد بزرگ** معروف است و در فصل (۸) ارائه خواهد شد. به علاوه، یک تعبیر دیگر احتمال را به عنوان اندازهٔ باوری که داریم در بخش (۷) این فصل ارائه خواهیم داد.

تبصره : فرض کردیم که P(E) برای تمام پیشامدهای E از فضای نمونه تعریف شده باشد. در واقع وقتی فضای نمونهٔ یک مجموعه نامتناهی و نا شمارا است P(E) فقط برای پیشامدهای به اصطلاح اندازه پذیر تعریف می شود. ولی این محدودیت مورد توجه ما نیست زیرا تمام پیشامدهای مورد توجه اندازه پذیرند.

۴ - چند حکم ساده

در این بخش چند حکم ساده را در ارتباط با احتمال ثابت خواهیم کرد. ابتدا توجه کنید که چون همیشه E و E^c ناسازگارند و $E \cup E^c = S$ ، بنا به اصول (۲) و (۳) داریم

$$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

یا به عبارت معادل، گزارهٔ حکم ۴-۱ صحیح است .

حکم ۴-۱

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

به عبارت دیگر حکم ۴-۱ بیان می کند: احتمال این که یک پیشامد رخ ندهد برابر است با ۱ منهای احتمال آن که پیشامد رخ دهد. مثلاً، اگر احتمال آمدن یک شیر در پرتاب یک سکه $\frac{۳}{۸}$ باشد احتمال آمدن خط باید $\frac{۵}{۸}$ باشد.

حکم بعدی بیان می کند که اگر پیشامد E زیر مجموعهٔ پیشامد F باشد احتمال E نمی تواند بزرگتر از احتمال F باشد.

حکم ۴-۲

اگر $E \subset F$ ، *آن گاه*

$$P(E) \le P(F)$$

برهان: چون $E \subset F$ ، پیشامد F را می توان به صورت زیر نوشت

$$F = E \cup E^c F$$

بنابراین، چون E و $E^c F$ ناسازگارند از اصل ۳ نتیجه می شود

$$P(F) = P(E) + P(E^c F)$$

که حکم را ثابت می کند زیرا

$$P(E^c F) \ge 0$$

حکم ۴-۲ بیان می کند که مثلاً احتمال آمدن ۱ در ریختن یک تاس کمتر یا مساوی احتمال آمدن عدد فرد است.

حکم بعدی رابطهٔ بین احتمال اجتماع دو پیشامد و هریک از آنها و احتمال اشتراك آنها را به دست می دهد.

حکم ۴-۳

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

برهان: برای یافتن رابطه ای برای $P(E \cup F)$ ابتدا توجه کنید که $E \cup F$ را می توان

به صورت اجتماع دو پیشامد ناسازگار E و E^cF نوشت. پس بنا به اصل ۳ داریم

$$\begin{aligned} P(E\cup F) &= P(E\cup E^cF) \\ &= P(E) + P(E^cF) \end{aligned}$$

علاوه بر این، چون $EF \cup E^cF$ ، از اصل ۳ داریم

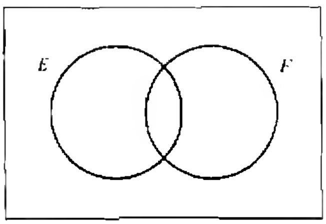
$$P(F) = P(EF) + P(E^cF)$$

یا بطور معادل

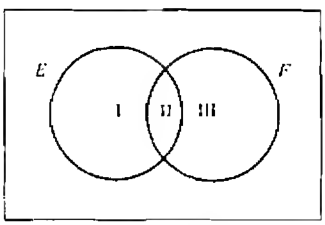
$$P(E^cF) = P(F) - P(EF)$$

و در نتیجه حکم ثابت می شود.

حکم ۴-۳ را می توان با توجه به تصویر ون در شکل ۲-۴ نیز ثابت کرد. این تصویر را به سه مجموعه جدا از هم همان طور که در شکل ۲-۵ نشان داده شده است تقسیم می کنیم. در این تصویر، مجموعهٔ I تمام نقاطی از E را نشان می دهد که در F نیستند (یعنی EF^c)، مجموعهٔ II تمام نقاطی را که در E و F هستند نشان می دهد (یعنی EF) و مجموعهٔ III تمام نقاطی از F را نشان می دهد که در E نیستند (یعنی، E^cF).



شکل ۲-۴ تصویر ون



شکل ۲-۵ تصویر ون به صورت تقسیمات

در شکل ۲-۵ دیده می شود که

$$\begin{aligned} E\cup F &= \mathrm{I}\cup\mathrm{II}\cup\mathrm{III} \\ E &= \mathrm{I}\cup\mathrm{II} \\ F &= \mathrm{II}\cup\mathrm{III} \end{aligned}$$

چون I ، II و III جدا از هم هستند، بنا به اصل ۳ داریم

$$\begin{aligned} P(E\cup F) &= P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) + P(\mathrm{III}) \\ P(E) &= P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) \\ P(F) &= P(\mathrm{II}) + P(\mathrm{III}) \end{aligned}$$

که نشان می دهد

$$P(E\cup F) = P(E) + P(F) - P(\mathrm{II})$$

در نتیجه حکم ۴-۳ ثابت می شود زیرا $\mathrm{II} = EF$.

مثال ۴ الف. دو سکه را می اندازیم فرض کنید هریک از چهار نقطه فضای نمونه

$$S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

همشانس و در نتیجه با احتمال $\frac{1}{4}$ رخ دهند . فرض کنید

$$E = \{(H,H),(H,T)\} \qquad \text{و} \qquad F = \{(H,H),(T,H)\}$$

یعنی E پیشامد سکهٔ اول شیر و F پیشامد سکهٔ دوم شیر است .

بنا به حکم ۴-۳، $P(E \cup F)$ احتمال این که سکهٔ اول یا سکهٔ دوم شیر بیاید عبارت است از

$$\begin{aligned} P(E\cup F) &= P(E) + P(F) - P(EF) \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - P(\{(H,H)\}) \\ &= 1 - \tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

البته این احتمال را مستقیماً نیز می توان محاسبه کرد، زیرا

$$P(E\cup F) = P(\{(H,H),(H,T),(T,H)\}) = \tfrac{3}{4}$$

همچنین می توان احتمال رخ دادن یکی از سه پیشامد E یا F یا G را محاسبه کرد :

$$P(E\cup F\cup G) = P[(E\cup F)\cup G]$$

که بنا به حکم ۴-۳ برابر است با

$$P(E\cup F) + P(G) - P[(E\cup F)G]$$

چون با توجه به قانون پخشی پیشامدهای $(E \cup F)G$ و $EG \cup FG$ معادلند، می توان نوشت

$$\begin{aligned}
&P(E\cup F\cup G)\\
&\quad = P(E) + P(F) - P(EF) + P(G) - P(EG\cup FG)\\
&\quad = P(E) + P(F) - P(EF) + P(G) - P(EG) - P(FG) + P(EGFG)\\
&\quad = P(E) + P(F) + P(G) - P(EF) - P(EG) - P(FG) + P(EFG)
\end{aligned}$$

در واقع حکم زیر را می توان به استقرا ثابت کرد.

حکم ۴-۴

$$\begin{aligned}
&P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)\\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1}E_{i_2}) + \cdots\\
&\qquad + (-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_r})\\
&\qquad + \cdots + (-1)^{n+1} P(E_1E_2\cdots E_n)
\end{aligned}$$

مجموع $\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_r})$ روی تمام $\binom{n}{r}$ زیر مجموعهٔ ممکن به حجم r از مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,n\}$ در نظر گرفته می شود.

به عبارت دیگر حکم ۴-۴ بیان می کند که احتمال اجتماع k پیشامد برابر است با مجموع احتمالهای این پیشامدها یک به یک منهای مجموع احتمالهای این پیشامدها دو به دو به اضافهٔ مجموع احتمالهای این پیشامدها سه به سه و الی آخر.

۵ - فضاهای نمونه با برآمدهای همشانس

در بسیاری از آزمایشها طبیعی است که فرض کنیم تمام برآمدهای فضای نمونه از نظر رخ دادن یکسان هستند، یعنی، اگر یک آزمایش که فضای نمونه آن یک مجموعه متناهی است مانند $S = \{1,2,\ldots, N\}$ را در نظر بگیریم، آن گاه اغلب طبیعی است که فرض کنیم

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{N\})$$

که بنا به اصول (۲) و (۳) (چرا ؟) داریم

$$P(\{i\}) = \frac{1}{N} \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

و با توجه به اصل (۳) برای هر پیشامد E داریم

$$P(E) = \frac{\text{تعداد نقاط متعلق به E}}{\text{تعداد نقاط متعلق به S}}$$

به عبارت دیگر، اگر فرض کنیم که تمام برآمدهای یک آزمایش از نظر رخ دادن همشانس هستند، آن گاه احتمال هر پیشامد E برابر است با نسبت تعداد نقاط فضای نمونه که به E متعلق است.

مثال ۵ الف. در ریختن دو تاس احتمال مجموع ۷ چقدر است؟

حل : این مسأله را با این فرض که ۳۶ برآمد ممکن هم احتمال هستند حل می کنیم . چون ۶ برآمد معین (۶و۱)، (۵و۲)، (۴و۳) و (۳و۴)، (۲و۵)، و (۱و۶) وجود دارد که مجموع تاسها برابر ۷ می شود، احتمال مطلوب برابر است با $\frac{۱}{۶} = \frac{۶}{۳۶}$.

مثال ۵ ب. اگر دو مهره از جعبه ای شامل ۶ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه بطور تصادفی خارج کنیم، احتمال این که یکی از مهره های خارج شده سفید و دیگری سیاه باشد چقدر است؟

حل : اگر ترتیب استخراج مهره های موردنظر باشد فضای نمونه شامل ۱۱۰=۱۰×۱۱ نقطه خواهد بود. به علاوه ۳۰ = ۵ × ۶ حالت وجود دارد که در آنها مهرهٔ اول سفید و مهره دوم سیاه است. همین طور ۳۰ = ۶ × ۵ حالت وجود دارد که در آنها مهره اول سیاه و مهرهٔ دوم سفید است. با فرض این که «استخراج تصادفی» به این معناست که ۱۱۰ نقطهٔ فضای نمونه هم احتمال هستند، احتمال مطلوب به صورت زیر است

$$\frac{۳۰ + ۳۰}{۱۱۰} = \frac{۶}{۱۱}$$

این مسأله را می توان با در نظر گرفتن برآمد آزمایش به صورت مجموعه (نامرتب) از مهره های خارج شده حل کرد. با توجه به این مطلب فضای نمونه $\binom{11}{2} = 55$ نقطه دارد.

چون بنا به فرض تمام برآمدهای ممکن هم احتمال هستند احتمال مطلوب عبارت است از

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{6}{11}$$

که البته با جواب قبلی برابر است .

مثال ۵ پ. کمیته ای ۵ نفری از یک گروه شامل ۶ مرد و ۹ زن انتخاب می شود . اگر انتخاب بتصادف صورت گیرد، احتمال این که کمیته از ۳ مرد و ۲ زن تشکیل شودچقدر است؟

حل : فرض می کنیم « انتخاب تصادفی» است یعنی هریک از $\binom{15}{5}$ انتخاب ممکن احتمال انتخاب شدن یکسان دارند. پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001}$$

مثال ۵ ت. یک دست پوکر شامل ۵ ورق است، اگر ورقها متمایز با مقادیر متوالی ولی همه از یک خال نباشند دست را استریت گویند. مثلاً، دستی که شامل ۵ پیک، ۶ پیک، ۷ پیک، ۸ پیک و ۹ دل باشد یک استریت است. احتمال داشتن یک استریت چقدر است؟

حل : فرض می کنیم تمام $\binom{52}{5}$ دست پوکر هم احتمال باشند. برای تعیین تعداد برآمدهایی که استریت هستند، ابتدا برآمدهای ممکن آس، دو ، سه، چهار و پنج (صرف نظر از خال) را معین می کنیم. چون آس می تواند یکی از ۴ آس موجود باشد و همین طور دو ، سه، چهار، پنج، نتیجه می شود که 4^5 برآمد به صورت فوق خواهیم داشت. پس چون در ۴ تا از این برآمدها، همهٔ ورقها از یک خال هستند(این دست را استریت فلش گویند)، نتیجه می شود $4^5 - 4$ دست به صورت آس، دو، سه، چهار، پنج استریت می سازند. همین طور $4^5 - 4$ دست به صورت ده، سرباز، بی بی، شاه و آس استریت می سازند.

بنابراین $10\,(4^5 - 4)$ دست استریت وجود دارد. پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$\frac{10(4^5-4)}{\binom{52}{5}} \approx .0039$$

مثال ۵ ث. یک دست ۵ تایی پوکر را یک فول گوییم اگر از ۳ ورق همنام و ۲ ورق همنام

تشکیل شده باشد. (یعنی فول عبارت است از ۳ ورق از یک نوع و یک جفت) احتمال آوردن فول چقدر است؟

حل : فرض می کنیم تمام $\binom{52}{5}$ دست ممکن هم احتمال باشند. برای تعیین تعداد فولهای ممکن، توجه کنید که $\binom{4}{2}\binom{4}{3}$ ترکیب متمایز از مثلاً ۲ ده و ۳ سرباز وجود دارد. چون ۱۳ حالت برای انتخاب جفت و ۱۲ حالت برای انتخاب ورقهای باقی مانده امکان پذیر است پس احتمال آوردن یک فول برابر است با

$$\frac{13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}\binom{4}{3}}{\binom{52}{5}} \approx .0014$$

مثال ۵ ج. در بازی بریج تمام ۵۲ ورق بین ۴ بازیکن توزیع می شود. احتمال آن که یکی از بازیکنها ۱۳ پیک داشته باشد چقدر است؟

حل : حالتهای ممکن تقسیم ورقها بین ۴ بازیکن برابر است با $\binom{52}{13, 13, 13, 13}$ چون $\binom{39}{13, 13, 13}$ حالت وجود دارد که در آنها یکی از بازیکنها تمام ۱۳ پیک می رسد، پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$\frac{4\binom{39}{13, 13, 13}}{\binom{52}{13, 13, 13, 13}} \approx 6.3 \times 10^{-12}$$

مثال بعد نشان می دهد که نتایج احتمال گاهی در اولین برخورد تعجب آور هستند.

مثال ۵ چ. اگر در اتاقی n نفر باشند، احتمال این که هیچ دو نفری در یک روز متولد نشده باشند چقدر است؟ عدد n باید به چه بزرگی باشد تا این احتمال کمتر از $\frac{1}{2}$ شود؟

حل : چون هر فرد ممکن است در یکی از ۳۶۵ روز متولد شده باشد. پس تعداد برآمدهای ممکن ^{n}(۳۶۵) است. (از امکان تولد یک فرد در ۲۹ فوریه صرف نظر می کنیم) فرض می کنیم برآمدها همشانس باشند، در این صورت احتمال مطلوب برابر است با

$$\frac{365\,(364\,)\ldots(365 - n + 1)}{(365\,)^{n}}$$

تعجب‌آور است که برای n = ۲۳ این احتمال کمتر از $\frac{1}{2}$ است . یعنی اگر ۲۳ نفر در اتاق باشند، احتمال این که حداقل دونفرشان یک تاریخ تولد داشته باشند بیشتر از $\frac{1}{2}$ است . بیشتر مردم از این مطلب تعجب می کنند . ولی تعجب‌آورتر است که این احتمال تا ۰/۹۷۵ افزایش پیدا می کند اگر در اتاق ۵۰ نفر باشند . و با ۱۰۰ نفر این نسبت بیشتر از ۳ میلیون به ۳ میلیون و یک خواهد بود (یعنی احتمال بزرگتر از $(3 \times 10^6) / (3 \times 10^6 + 1)$ است .

مثال ۵ ح . در یک تیم فوتبال ۲۰ سیاه و ۲۰ سفید بازی می کنند . بازیکنها به گروههای ۲ تایی برای انتخاب هم اتاقی تقسیم می شوند . اگر انتخاب دو تاییها تصادفی باشد، احتمال این که هیچ سفید با سیاه هم اتاقی نباشد چقدر است؟ احتمال آن که ۲i ، $i = 1,2, \ldots, 10$ سفید و سیاه هم اتاقی باشند چقدر است؟

حل : تقسیم ۴۰ بازیکن به ۲۰ زوج مرتب به حالتهای زیر امکان پذیر است

$$\binom{40}{2, 2, \ldots, 2} = \frac{(40)!}{(2!)^{20}}$$

[یعنی $(40)! / 2^{20}$ حالت برای تقسیم بازیکنها به اولین زوج دومین زوج و الی آخر وجود دارد] . بنابراین $(20)! \; 2^{20} / 40!$ حالت برای تقسیم بازیکنها به گروههای ۲ تایی (بدون ترتیب) امکان پذیر است . علاوه بر این، چون تقسیم بازیکنها به قسمی که هیچ زوجی سفید و سیاه نباشد به این صورت خواهد بود که سیاهها (سفیدها) بین خودشان به گروههای ۲ تایی تقسیم شوند در نتیجه $[(20)! / 2^{10}(10)!]^2$ حالت امکان پذیر است . بنابراین احتمال مطلوب به صورت زیر محاسبه می شود .

$$P_0 = \frac{\left(\dfrac{(20)!}{2^{10}(10)!}\right)^2}{\dfrac{(40)!}{2^{20}(20)!}} = \frac{[(20)!]^3}{[(10)!]^2(40)!}$$

برای محاسبهٔ P_{2i} احتمال این که ۲i زوج سفید و سیاه داشته باشیم، ابتدا توجه کنید که $\binom{20}{2i}^2$ حالت برای انتخاب ۲i سفید و ۲i سیاه وجود دارد . این ۴i بازیکن را می توان به صورت ! (۲i) زوج سفید و سیاه تقسیم کرد . (زیرا اولین سیاه را می توان با هریک از ۲i سفید قرار داد و سیاه دوم را با هریک از ۲i - 1 سفید در یک اتاق قرار داد .) چون ۲i − ۲۰ سفید

(سیاه) باقیمانده باید بین خودشان تقسیم شوند، تعداد حالات مطلوب عبارت است از

$$\binom{20}{2i}^2 (2i)! \left[\frac{(20-2i)!}{2^{10-i}(10-i)!}\right]^2$$

بنابر این

$$P_{2i} = \frac{\binom{20}{2i}^2 (2i)! \left[\frac{(20-2i)!}{2^{10-i}(10-i)!}\right]^2}{\frac{(40)!}{2^{20}(20)!}} \qquad i = 0, 1, \ldots, 10$$

حال مقدار $i = 0, 1, \ldots, 10, P_{2i}$ را می توان محاسبه کرد یا مقدار تقریبی آن را با استفاده از فرمول استرلینگ که $n!$ را تقریباً برابر $n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}$ در نظر می گیرد به دست آورد. به عنوان نمونه داریم

$$P_0 = 1.3403 \times 10^{-6}$$
$$P_{10} = .345861$$
$$P_{20} = 7.6068 \times 10^{-6}$$

مثال بعدی در این بخش نه تنها جوابی تعجب آور دارد بلکه از جنبه نظری نیز حائز اهمیت است.

مثال ۵ غ. مسألهٔ جور کردن. فرض کنید N مرد در یک مهمانی کلاههای خود را به وسط اتاق پرتاب می کنند. ابتدا کلاهها خوب مخلوط می شوند سپس هر مرد بطور تصادفی کلاهی انتخاب می کند.

۱ - احتمال این که هیچ کدام کلاه خود را انتخاب نکرده باشد چقدر است؟

۲- احتمال این که فقط ۴ مرد کلاههای خود را انتخاب کرده باشند چقدر است؟

حل: در جواب (۱) ابتدا این احتمال را که حداقل یک مرد کلاه خود را انتخاب کرده باشد محاسبه می کنیم. فرض کنید $i = 1, 2, \ldots, N, E_i$ این پیشامد باشد که مرد i ام کلاه خود را انتخاب کرده است، حال با توجه به حکم ۴-۴ این احتمال به صورت زیر محاسبه می شود

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(E_i) - \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1}E_{i_2}) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1} \sum_{i_1<i_2\cdots<i_n} P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n})$$
$$+ \cdots + (-1)^{N+1}P(E_1E_2\cdots E_N)$$

اگر برآمد این آزمایش را به صورت یک بردار N بعدی در نظر بگیریم که عضو i ام آن شمارهٔ کلاهی باشد که توسط مرد i ام انتخاب شده است، آن گاه تعداد برآمد های ممکن !N خواهد بود. [برآمد (1,2, . . . N) به عنوان مثال نشان می دهد که هر مرد کلاه خودش را انتخاب کرده است] . علاوه براین، $E_{i_1}, E_{i_2}, ..., E_{i_n}$ این پیشامد است که هریک از n مرد i_1 ، i_2 ، ... ، i_n کلاه خودش را انتخاب کرده است، و می توانند به یکی از 1. 2. 3 ...[N-(n+1)] (N-n)=!(N-n) حالت رخ دهد؛ زیرا از N − n مرد باقیمانده اولی می تواند، هریک از N − n کلاه را انتخاب کند، دومی می تواند هریک از (n + 1) - N کلاه را و الی آخر بنابراین با فرض این که !N برآمد ممکن هم احتمال هستند، داریم

$$P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n}) = \frac{(N-n)!}{N!}$$

همچنین چون $\binom{N}{n}$ جمله در $\sum_{i_1<i_2\cdots<i_n} P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n})$ وجود دارد، دیده می شود که

$$\sum_{i_1<i_2\cdots<i_n} P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n}) = \frac{N!(N-n)!}{(N-n)!n!N!} = \frac{1}{n!}$$

در نتیجه

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{N+1}\frac{1}{N!}$$

و احتمال این که هیچ کدام کلاه خود را انتخاب نکرده باشند برابر است با

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^N}{N!}$$

که برای مقادیر بزرگ N تقریباً برابر است با $e^{-1} \approx 0.36788$. به عبارت دیگر برای N بزرگ احتمال این که هیچ مردی کلاه خود را انتخاب نکند برابر ۰/۳۷ است. (چه بسا خوانندگانی که این فکر اشتباه را دارند که اگر $N \to \infty$ این احتمال به یک نزدیک می شود.

برای محاسبه احتمال این که دقیقاً k مرد کلاه خود را انتخاب کنند، ابتدا به یک مجموعهٔ

k مردمشخص توجه می کنیم. تعدادحالاتی که فقط این k مرد کلاههای خودشان را انتخاب کنند برابراست با تعداد حالاتی که N-k مرد باقیمانده کلاههای خودشان را انتخاب نکنند. ولی چون

$$1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}$$

احتمال این است که هیچ یک از N-k مرد کلاه خود را انتخاب نکنند، نتیجه می گیریم که تعداد حالاتی که k مرد مشخص کلاههای خود را انتخاب کنند برابر است با:

$$(N-k)!\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\right]$$

بنابراین، چون k مرد را می توان به $\binom{N}{k}$ طریق انتخاب کرد تعداد حالات مساعد برابر است با

$$\binom{N}{k}(N-k)!\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\right]$$

پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$\frac{\binom{N}{k}(N-k)!\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\right]}{N!}$$

$$=\frac{1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}}{k!}$$

که به ازای مقادیر بزرگ N تقریباً برابر $e^{-1}/k!$ است. مقدار $\frac{e^{-1}}{k!}$ ، $k=0, 1, \ldots$ از جنبهٔ نظری بسیار مهم است، زیرا این مقدار با توزیع پواسون در ارتباط است. این مطلب را در فصل ۴ بررسی خواهیم کرد[1].

برای تشریح بیشتر کاربرد حکم ۴-۴ به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۵ د. اگر ۱۰ زوج متأهل بتصادف دور یک میز گرد بنشینند، این احتمال را حساب کنید که هیچ مردی پهلوی زنش قرار نگیرد.

۱- برای ملاحظه یک روش دیگر به مثال ۵ پ فصل ۳ مراجعه کنید.

حل : اگر E_i , $i = 1,2,\ldots,10$ این پیشامد باشد که زوج i ام پهلوی هم قرار گرفته باشند، احتمال مطلوب عبارت است از $1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{10} E_i\right)$ حال با استفاده از حکم ۴-۴ ، داریم

$$P\left(\bigcup_{1}^{10} E_i\right) = \sum_{1}^{10} P(E_i) - \cdots + (-1)^{n+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_n}) + \cdots - P(E_1 E_2 \cdots E_{10})$$

برای محاسبه $P(E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_n})$ ابتدا توجه کنید که ۲۰ نفر به !۱۹ حالت مختلف می توانند دور میز گرد بنشینند (چرا ؟). تعداد ترتیبهایی که n مرد پهلوی خانمهایشان بنشینند بآسانی محاسبه می شود؛ اگر هر زن و شوهر را به عنوان یک فرد در نظر بگیریم در این حالت لازم است $n - ۲۰ = n + n ۲ - ۲۰$ فرد را دور میز گرد بنشانیم که تعداد آنها برابر $(20 - n - 1)!$ خواهد بود. بالاخره چون هریک از n زوج به‌دو طریق می توانند پهلوی هم قرار گیرند تعداد حالات مساعد برابر $2^n (20 - n - 1)!$ خواهد بود، بنابراین

$$P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_n}) = \frac{2^n (19 - n)!}{(19)!}$$

حال با توجه به حکم ۴-۴ احتمال این که حداقل یک زوج پهلوی هم قرار بگیرند به صورت زیر محاسبه می شود

$$\binom{10}{1} 2^1 \frac{(18)!}{(19)!} - \binom{10}{2} 2^2 \frac{(17)!}{(19)!} + \binom{10}{3} 2^3 \frac{(16)!}{(19)!} - \cdots - \binom{10}{10} 2^{10} \frac{9!}{(19)!} \approx .6605$$

و احتمال مطلوب برابر ۰٫۳۳۹۵ است.

مثال ۵ ذ. گشتها. یک تیم ورزشکار را در نظر بگیرید که در پایان کار دارای n برد و m باخت است. با بررسی دنبالهٔ بردها و باختها امیدواریم که بتوانیم تعیین کنیم که آیا این تیم باید بازیهایی را که در آنها احتمال برد بیشتر است نسبت به سایر بازیها بیشتر طول بدهد. یک راه به دست آوردن اطلاعاتی در مورد این سؤال شمردن تعداد گشتهای برد و محاسبهٔ احتمال آن است وقتی تمام $\frac{(n+m)!}{n!(m!)}$ ترتیب n برد و m باخت را هم احتمال در نظر بگیریم. منظور از یک گشت برد دنبالهٔ بردهای متوالی است. مثلاً اگر $n = 10$ و $m = 6$ باشد و دنبالهٔ برآمدها WWLLWWWLLWLLWWWW باشد تعداد گشتهای برد برابر ۴ است. گشت اول به طول ۲، گشت دوم به طول ۳ و گشت سوم به طول ۱ و آخری به طول ۴ است.

حال فرض کنید تیم دارای n برد و m باخت است . و فرض کنید تمام ترتیبها

$$(n+m)!/(n!\,m!) = \binom{n+m}{n}$$

هم احتمال هستند، می خواهیم احتمال r گشت برد را محاسبه کنیم . برای این کار برداری از اعداد صحیح مثبت $x_1, x_2, \ldots, x_r$ را در نظر می گیریم که در آن $x_1 + \ldots + x_2 = n$ ، و تعداد برآمدهایی را که در آن r گشت برد وجود دارد و طول گشت i ام برابر x_i ، $i = 1, 2, \ldots, r$ است . برای هریک از این برآمدها اگر y_1 تعداد باختهای قبل از اولین گشت برد باشد و y_2 تعداد باختهای بین اولین دو گشت برد باشد، ... ، $y_r + 1$ تعداد باختها بعد از آخرین گشت برد باشد، آن گاه y_i در شرایط زیر صدق می کند

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{r+1} = m \qquad y_1 \ge 0,\ y_{r+1} \ge 0,\ y_i > 0,\ i = 2, \ldots, r$$

و برآمد را به صورت زیر می توان نشان داد .

$$\underbrace{LL\ldots L}_{y_1}\ \underbrace{WW\ldots W}_{x_1}\underbrace{L\ldots L}_{y_2}\ \underbrace{WW\ldots W}_{x_2}\ldots\underbrace{WW}_{x_r}\underbrace{L\ldots L}_{y_{r+1}}$$

بنابراین تعدادبرآمدهایی که دارایr گشت بردهستند وگشت i ام آنهابه طول x_i ، $i = 1, 2, \ldots, r$ است ، برابر تعداد اعداد صحیح $y_1, \ldots, y_{r+1}$ است که در شرایط فوق صدق می کنند، یا به عبارت معادل برابر با تعداد اعداد صحیح مثبت

$$\bar{y}_1 = y_1 + 1, \qquad \bar{y}_i = y_i,\ i = 2, \ldots, r,\ \bar{y}_{r+1} = y_{r+1} + 1$$

است که در شرط زیر صدق کنند

$$\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_{r+1} = m + 2$$

بنابه حکم ۶-۱ در فصل ۱ تعداد این برآمدها برابر $\binom{m+1}{r}$ است . پس تعداد کل برآمدهای دارای r گشت برد برابر $\binom{m+1}{r}$ ضرب در تعداد جوابهای صحیح و مثبت $x_1 + \ldots + x_r = n$ است . همچنین با توجه به حکم ۶-۱ تعداد برآمدهای شامل r گشت برد برابر $\binom{n-1}{r-1}$ $\binom{m+1}{r}$ است . و چون $\binom{n+m}{n}$ برآمد هم احتمال هستند داریم

$$P(\{\text{گشت برد } r\}) = \frac{\binom{m+1}{r}\binom{n-1}{r-1}}{\binom{m+n}{n}}, \qquad r \ge 1$$

مثلاً اگر $n = 8$ ، $m = 6$ ، آن گاه احتمال r گشت برابر است با

$$\binom{7}{7}\binom{7}{6}\Big/\binom{14}{8} = 1/429$$

در صورتی که تمام $\binom{14}{8}$ برآمد هم احتمال باشند. پس اگر برآمد

WLWLWLWLWWLWLW

باشد باید مظنون باشیم که احتمال برد تیم به مرور زمان تغییر کرده باشد. (بخصوص، احتمال این که تیم ببرد بسیار زیاد است وقتی آخرین بازی را باخته باشد و خیلی کم است وقتی آخرین بازی را برده باشد.) از طرف دیگر اگر برآمد به صورت زیر باشد.

WWWWWWWWLLLLLL

یعنی فقط یک گشت وجود داشته باشد، چون

$$P(\{\text{یک گشت}\}) = \binom{7}{1}\binom{7}{0}\Big/\binom{14}{8} = 1/429$$

بازهم به نظر می‌رسد که احتمال برد تیم در ۱۴ بازی بدون تغییر باقی می‌ماند.

۶ - احتمال یك تابع مجموعه ای پیوسته است

دنبالهٔ پیشامدهای $\{E_n, n \geq 1\}$ را دنباله صعودی گوییم اگر

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots$$

و آن را نزولی گوییم اگر

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \cdots$$

اگر $\{E_n, n \geq 1\}$ یک دنباله صعودی از پیشامدها باشد، آن گاه پیشامد جدید $\lim_{n\to\infty} E_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

که در آن به ازای هر n، $E_n \subset E_{n+1}$. همین طور، اگر $\{E_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای نزولی از پیشامدها باشد پیشامد $\lim_{n\to\infty} E_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

که در آن به ازای هر n ، $E_n \supset E_{n+1}$

حال حکم ۶-۱ را ثابت می کنیم.

حکم ۶-۱

اگر $\{E_n, n \geq 1\}$ دنباله ای صعودی یا نزولی از پیشامدها باشد، آن گاه

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P(\lim_{n\to\infty} E_n)$$

برهان : ابتدا فرض می کنیم $\{E_n, n \geq 1\}$ دنباله ای صعودی باشد و پیشامدهای F_n ، $n \geq 1$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$F_1 = E_1$$

$$F_n = E_n\left(\bigcup_{1}^{n-1} E_i\right)^c = E_n E_{n-1}^c \qquad n > 1$$

که در آن از تساوی $\bigcup_{1}^{n-1} E_i = E_{n-1}$ استفاده شده است ، زیرا پیشامدها صعودی هستند. به عبارت دیگر F_n ها پیشامدهای ناسازگارند، به قسمی که

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \qquad \text{و} \qquad \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

پس

$$P\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup_{1}^{\infty} F_i\right)$$

$$= \sum_{1}^{\infty} P(F_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} P(F_i)$$ (بنا به اصل ۳)

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{1}^{n} F_i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{1}^{n} E_i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

که حکم را برای دنباله صعودی $\{E_n, n \geq 1\}$ ثابت می کند.

اگر $\{E_n, n \geq 1\}$ یک دنبالهٔ نزولی باشد، آن گاه $\{E_n^c, n \geq 1\}$ یک دنبالهٔ صعودی است، بنابراین با توجه به معادلات قبلی داریم

$$P\left(\bigcup_1^\infty E_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

اما چون $\bigcup_1^\infty E_i^c = \left(\bigcap_1^\infty E_i\right)^c$ ، دیده می شود که

$$P\left(\left(\bigcap_1^\infty E_i\right)^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

یا به عبارت معادل،

$$1 - P\left(\bigcap_1^\infty E_i\right) = \lim_{n\to\infty} [1 - P(E_n)] = 1 - \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

یا

$$P\left(\bigcap_1^\infty E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

که حکم را ثابت می کند.

مثال ۶ الف. احتمال و یک پارادوکس یک جعبهٔ بزرگ و تعداد نامتناهی مهره با شماره های ۱، ۲، ۳و . . . مفروض است آزمایش زیر را در نظر بگیرید:

یک دقیقه به ساعت ۱۲ شب مهره های ۱ تا ۱۰ را در جعبه قرار می دهیم و مهرهٔ شمارهٔ ۱۰ را خارج می کنیم (فرض کنید خارج کردن مهره زمان نمی برد) $\frac{1}{2}$ دقیقه به ۱۲ مهره های شماره ۱۱ تا ۲۰ را در جعبه قرار داده و مهرهٔ شماره ۲۰ را خارج می کنیم. $\frac{1}{4}$ دقیقه به ۱۲ مهره های شمارهٔ ۲۱ تا ۳۰ را در جعبه قرار داده و مهرهٔ شماره ۳۰ را خارج می کنیم. در $\frac{1}{8}$ دقیقه به ۱۲ و الی آخر.

سؤال مورد نظر این است که در ساعت ۱۲ چند مهره داخل جعبه خواهد بود؟

جواب بدیهی مسأله این است که تعداد مهره های داخل جعبه در ساعت ۱۲ بی نهایت خواهد بود، زیرا هر مهره که شمارهٔ آن به شکل $10n$ ، $n \geq 1$ ، نباشد در جعبه قرار می گیرد و قبل از ساعت ۱۲ از آن خارج نمی شود. سپس مسأله به صورت فوق حل می شود.

با وجود این اگر آزمایش را تغییر دهیم و فرض کنیم در ۱ دقیقه به ۱۲ شب مهره های

شماره ۱ تا ۱۰ در جعبه قرار گیرند و مهرهٔ شماره ۱ از آن خارج شود، در $\frac{1}{2}$ دقیقه به ۱۲ مهره های شماره ۱۱ تا ۲۰ در جعبه قرار گیرند و مهرهٔ شماره ۲ از آن خارج شود، در $\frac{1}{4}$ دقیقه به ۱۲ مهره های ۲۱ تا ۳۰ در جعبه قرار گیرند و مهره شماره ۳ از آن خارج شود، در $\frac{1}{8}$ دقیقه به ۱۲ مهره های شماره ۳۱ تا ۴۰ درجعبه قرارگیرند و مهره شماره ۴ از آن خارج شود، و الی آخر.

برای این آزمایش جدید در ساعت ۱۲ چند مهره در جعبه خواهد بود؟با تعجب بسیار، حالا جواب این است که جعبه در ساعت ۱۲ خالی است زیرا هر مهره را که در نظر بگیرید ـ مثلاً مهرهٔ شماره n ـ در یک فاصلهٔ زمانی تا ساعت ۱۲[بخصوص، در $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ دقیقه به ۱۲] این مهره از جعبه خارج شده است. پس به ازای هر n، مهرهٔ شماره n در ساعت ۱۲ داخل جعبه نخواهد بود، در نتیجه باید در این ساعت خالی باشد.

از بحث فوق دیده می شود که طرز خارج کردن مهره های انتخابی متفاوت است زیرا در حالت اول تنها مهره های با شماره $10n$، $n \geq 1$ از جعبه خارج می شود، در صورتی که در حالت دوم تمام مهرها بالاخره خارج می شوند. حال فرض کنید وقتی یک مهره خارج می شود انتخاب آن تصادفی باشد. یعنی فرض کنید که در یک دقیقه به ۱۲ مهره شمارهٔ ۱ تا ۱۰ در جعبه قرار می گیرند و یک مهره بتصادف از آن خارج می شود، و الی آخر. در این حالت در ساعت ۱۲ چند مهره در جعبه خواهد بود؟

حل: ثابت می کنیم با احتمال ۱، جعبه در ساعت ۱۲ خالی خواهد بود. ابتدا مهرهٔ شماره ۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید E_n این پیشامد باشد که مهره شمارهٔ ۱ بعد از n استخراج هنوز در جعبه باشد. بدیهی است که

$$P(E_n) = \frac{9 \cdot 18 \cdot 27 \cdots (9n)}{10 \cdot 19 \cdot 28 \cdots (9n+1)}$$

[برای روشن شدن این مطلب، توجه کنید که اگر مهرهٔ شمارهٔ ۱ بعد از n استخراج هنوز در جعبه باشد، اولین مهره خارج شده می تواند هریک از ۹ مهره باشد، دومی هریک از ۱۸ مهره (در موقع استخراج دوم در جعبه ۱۹ مهره وجود دارد که یکی از آنها باید مهرهٔ شماره ۱ باشد). و الی آخر. مخرج نیز به همین صورت به دست می آید].

حال این پیشامد که مهرهٔ شماره ۱ در ساعت ۱۲ هنوز در جعبه است دقیقاً

عبارت است از $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. چون پیشامدهای E_n ، $n \geq 1$ ، نزولی هستند از حکم ۶-۱ نتیجه می‌شود که :

(مهرهٔ شماره ۱ در ساعت ۱۲ داخل جعبه است)

$$= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n}{9n+1}\right)$$

حال نشان می‌دهیم که

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{9n}{9n+1} = 0$$

چون

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n}{9n+1}\right) = \left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n+1}{9n}\right)\right]^{-1}$$

پس کافی است نشان دهیم که

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{9n}\right) = \infty$$

از طرفی برای هر $m \geq 1$ ، داریم

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{9n}\right) &\geq \prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{9n}\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{18}\right)\left(1+\frac{1}{27}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{9m}\right)\\ &> \frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{9m}\\ &= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}\end{aligned}$$

بنابراین اگر $m \to \infty$ با توجه به $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i = \infty$ داریم

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{9n}\right)=\infty$$

پس اگر F_i این پیشامد باشد که مهرهٔ i در ساعت ۱۲ داخل جعبه است، نشان داده‌ایم که $P(F_1) = 0$. همین طور، می توان نشان داد که به ازای هر i ، $P(F_i) = 0$ (مثلاً، استدلالی مشابه نشان می دهد که برای $i = 11, 12, ..., 20$ ، $\prod_{n=2}^{\infty} [9n/(9n+1)]$)

بنابر این، احتمال این که جعبه در ساعت ۱۲ خالی نباشد، $P\left(\bigcup_{1}^{\infty} F_i\right)$ بنا به نامساوی بول در شرط زیر صدق می کند.

$$P\left(\bigcup_{1}^{\infty} F_i\right) \le \sum_{1}^{\infty} P(F_i) = 0$$

[به تمرینهای نظری (بخشهای ۳-۶) ۳ و ۱۵ مراجعه نمایید] پس با احتمال ۱ جعبه در ساعت ۱۲ خالی خواهد بود.

۷ - احتمال به عنوان میزان باور

تا این جا احتمال یک پیشامد از آزمایشی مفروض به صورت فراوانی رخ دادن این پیشامد وقتی آزمایش مرتباً تکرار شود تعبیر شد. ولی، کلمهٔ **احتمال** یک کاربرد دیگر هم دارد. مثلاً، این قبیل گزاره ها را خیلی شنیده ایم «۹۰ درصد احتمال دارد که هملت را شکسپیر نوشته باشد» یا « احتمال این که اسوالد به تنهایی در قتل کندی شرکت داشته باشد ۰/۸ است» این گزاره ها را چگونه می توان تعبیر کرد؟

ساده ترین و طبیعی ترین تعبیر این است که احتمالها در این گزاره ها به مقدار اعتقاد و باور شخصی بستگی دارد. به عبارت دیگر، فردی که گزاره های فوق را به کار می برد کاملاً مطمئن است که اسوالد به تنهایی حمله کرده است و حتی با اطمینان بیشتر معتقد است که هملت را شکسپیر نوشته است. این تعبیر احتمال به عنوان اندازه ای از باور و اعتقاد را اغلب احتمال شخصی یا ذهنی می نامند.

منطقی است اگر فرض کنیم که یک « اندازه باور» در تمام اصول احتمال صدق می کند. مثلا، اگر ۷۰ درصد اطمینان داشته باشیم **شکسپیر** ژولیوس سزار را نوشته و ۱۰ درصد مطمئن

باشیم که کار مارلو است آن گاه منطقی است که فرض کنیم با ۸۰ درصد کار شکسپیر یا مارلو است. بنابراین، چه احتمال را به صورت اندازهٔ باور و چه به صورت فراوانی رخداد پیشامد در درازمدت تعبیر کنیم، خواص ریاضی آن بدون تغییر باقی می ماند.

مثال ۷ الف. فرض کنید در یک مسابقهٔ اسب دوانی که در آن ۷ اسب شرکت دارند شما احساس می کنید دو اسب اول ۲۰ درصد شانس بردن و اسب ۳ و ۴ هریک ۱۵ درصد و ۳ اسب باقیمانده ۱۰ درصد شانس بردن دارند.

آیا برای شما بهتر است که بطور مساوی شرط بندی کنید، که برنده یکی از سه اسب اول است، یا این که برنده یکی از اسبهای ۱ ، ۵، ۶ و ۷ است؟

حل: بر مبنای احتمالهای شخصی در مورد برآمدهای مسابقه، احتمال برد اولین شرط عبارت است از ۰٫۵۵ = ۰٫۱۵+۰٫۲+۰٫۲، در صورتی که احتمال دومین شرط بندی عبارت است از ۰٫۵ = ۰٫۱+۰٫۱+۰٫۱+۰٫۲ پس شرط بندی اول جذابتر است.

باید توجه کرد وقتی احتمالهای ذهنی یک فرد همواره با اصول احتمال سازگارند که او فردی ایده آل باشد. مثلاً اگر از کسی سؤال شود که در باره شانسهای زیر چه فکر می کند

الف ـ امروز ببارد

ب ـ فردا ببارد

پ ـ امروز و فردا ببارد

ت ـ امروز یا فردا ببارد

کاملاً امکان دارد که بعد از مقداری بررسی جواب این شخص به صورت ۴۰ درصد، ۲۰ درصد و ۶۰ درصد باشد. ولی متأسفانه این جوابها(یا این احتمالهای ذهنی) با اصول احتمال سازگاری ندارند (چرا؟) البته انتظار داریم که بعد از این آگاهی پاسخ دهنده جوابهایش را تغییر دهد.

(یک امکان که آن را می توان پذیرفت عبارت است از ۳۰ درصد، ۴۰ درصد، ۱۰ درصد و ۶۰ درصد)

تمرینهای نظری

بخشهای ۱-۲

روابط زیر را ثابت کنید

۱- $EF \subset E \subset E \cup F.$

۲- $E \subset F, \longrightarrow F^c \subset E^c.$

۳- $F = FE \cup FE^c,$ و $E \cup F = E \cup E^c F.$

۴- $\left(\bigcup_1^\infty E_i\right)F = \bigcup_1^\infty E_i F,$ و $\left(\bigcap_1^\infty E_i\right) \cup F = \bigcap_1^\infty (E_i \cup F).$

۵- برای هر دنباله از پیشامده های E_1 ، E_2 ، ... دنبالهٔ جدید F_1 و F_2 و . . . از پیشامدهای ناسازگار (یعنی پیشامدهایی که $F_i F_j = \phi$ وقتی $i \neq j$)را به قسمی تعریف کنید که برای هر $n \geq 1$

$$\bigcup_1^n F_i = \bigcup_1^n E_i$$

۶- فرض کنید E ، F و G سه پیشامد باشند. عبارت پیشامدهای زیر را بر حسب E،F وG بیان کنید:

(الف) فقط E رخ دهد.

(ب) E و G رخ دهند ولیF رخ ندهد.

(پ) حداقل یکی از آنها رخ دهد.

(ت) حداقل دوتا از آنها رخ دهند.

(ث) هر سه رخ دهند.

(ج) هیچ کدام رخ ندهد.

(چ) حداکثر یکی از آنها رخ دهد.

(ح) حداکثر دوتا از آنها رخ دهد.

(خ) دقیقاً دوتا از آنها رخ دهد.

(د) حداکثر سه تا از آنها رخ دهد.

۷- عبارت سادهٔ پیشامدهای زیر را پیدا کنید.

$(E\cup F)(E\cup F^c);$
$(E\cup F)(E^c\cup F)(E\cup F^c);$
$(E\cup F)(F\cup G).$

۸- فرض کنید S مجموعه مفروضی باشد. اگر برای $k>0$ ، S_1 ، S_2 ، . . . ، S_k زیرمجموعه های جدا از هم S باشند به قسمی که $\bigcup_{i=1}^{k} S_i = S$ ، آن گاه مجموعه $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ را یک افراز S گویند. فرض کنید T_n تعداد افرازهای مختلف $\{1,2,\ldots,n\}$ باشد، در این صورت $T_1=1$ (تنها افراز عبارت است از $(S_1 = \{1\})$ و $T_2=2$ (دو افراز عبارتند از $(\{1\},\{2\}),(\{1,2\})$)

(الف) با محاسبه تمام افرازها نشان دهید که $T_3 = 5$ ، $T_4 = 15$.

(ب) ثابت کنید که

$$T_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T_k$$

با استفاده از این مقدار T_{10} را محاسبه کنید.

بخشهای ۳-۶

۱- فرض کنید آزمایشی n بار اجرا می شود. برای هر پیشامد E از فضای نمونه $n(E)$ تعداد دفعاتی است که پیشامد E رخ می دهد، و تعریف می کنیم $f(E) = \frac{n(E)}{n}$. ثابت کنید $f(\cdot)$ در اصول ۱، ۲ و ۳ صدق می کنند.

۲- ثابت کنید

$$P(E\cup F\cup G) = P(E)+P(F)+P(G)-P(E^cFG)-P(EF^cG)-P(EFG^c)-2P(EFG).$$

۳- نامساوی بول را ثابت کنید

$$P\left(\bigcup_{1}^{n} E_i\right) \le \sum_{1}^{n} P(E_i)$$

۴- اگر $P(E)=0.9, P(F)=0.8$ ، نشان دهید که $P(EF) \ge 0.7$. بطور کلی نا مساوی بن فرونی را ثابت کنید، یعنی

$$P(EF) \ge P(E)+P(F)-1$$

۵- نشان دهید احتمال این که دقیقاً یکی از دو پیشامد E یا F رخ دهد برابر است با

$$P(E) + P(F) - 2P(EF)$$

۶- ثابت کنید

$$P(EF^c) = P(E) - P(EF)$$

۷- ثابت کنید

$$P(E^cF^c) = 1 - P(E) - P(F) + P(EF)$$

۸- حکم ۴-۴ را ثابت کنید.

۹- جعبه ای دارای M مهره سفید و N مهره سیاه است. اگر یک نمونه تصادفی به حجم r انتخاب کنیم، احتمال این که شامل k مهره سفید باشد چقدر است؟ اگر M = k= 1 ، چقدر است؟

۱۰- نا مساوی بن فرونی را باستقرا برای n پیشامد ثابت کنید یعنی نشان دهید که

$$P(E_1E_2 \cdots E_n) \geq P(E_1) + \cdots + P(E_n) - (n-1)$$

۱۱- مسألهٔ جور کردن مثال ۵ ج را در نظر بگیرید. و A_N را برابر تعداد حالاتی که N مرد می توانند کلاههایشان را انتخاب کنند به قسمی که هیچ کدام کلاه خود را انتخاب نکنند تعریف می کنیم . ثابت کنید

$$A_N = (N-1)(A_{N-1} + A_{N-2})$$

این رابطه را با شرایط مرزی $A_1 = 0$ و $A_2 = 1$ می توان نسبت به A_N حل کرد و احتمال این که هیچ کدام جور نشود برابر $\frac{A_N}{N!}$ خواهد بود.

راهنمایی : بعد از این که اولین مرد یک کلاه انتخاب کند که از خودش نباشد، N-1 مرد باقیمانده از بین N-1 کلاه باقیمانده که کلاه یکی از آنها را شامل نمی شود باید انتخاب کنند پس یک مرد و یک کلاه اضافی وجود دارد . حال استدلال کنید که انتخابها جور نمی شود خواه مرد اضافی کلاه اضافی را انتخاب کند یا مرد اضافی کلاه اضافی را انتخاب نکنند .

۱۲- فرض کنید f_n تعداد حالاتی باشد که در n پرتاب یک سکه شیرهای متوالی ظاهر نشده است. تحقیق کنید که

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geq 2, \quad \text{و} \quad f_0 = 1, f_1 = 2$$

اگر P_n احتمال این باشد که شیرهای متوالی هرگز در n پرتاب ظاهر نشود، مقدار P_n (برحسب f_n) را وقتی تمام برآمدهای ممکن n پرتاب هم احتمال هستند حساب کنید. P_{10} را محاسبه کنید:

جواب : $P_{10} = 144/2^{10} = .141.$

۱۳- آزمایشی را در نظر بگیرید که فضای نمونه آن بی نهایت نقطه شما را باشد. نشان دهید که تمام نقاط فضای نمونه نمی توانند هم احتمال باشند. آیا احتمال رخ دادن تمام نقاط می تواند مثبت باشد؟

۱۴- مثال ۵ را در ارتباط با تعداد گشتهای برد در n برد و m باخت که بطور تصادفی قرار دارند در نظر بگیرید. حال مجموعهٔ تمام گشتها را مورد توجه قرار دهید ـ یعنی گشتهای برد به اضافهٔ گشتهای باخت ـ و ثابت کنید که

$$P\{\text{گشت } 2k\} = 2\,\frac{\binom{m-1}{k-1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{m+n}{n}}$$

$$P\{\text{گشت } 2k+1\} = \frac{\binom{m-1}{k-1}\binom{n-1}{k} + \binom{m-1}{k}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{m+n}{n}}$$

۱۵- با استفاده از نا مساوی بول برای تعداد متناهی پیشامد، نشان دهید برای هر دنبالهٔ نامتناهی از پیشامدهای E_n ، $i \geq 1$ ،

$$P\left(\bigcup_1^\infty E_i\right) \leq \sum_1^\infty P(E_i)$$

۱۶- ثابت کنید اگر $P(E_i) = 1$ ، $i \geq 1$ ، آن گاه $P\left(\bigcap_1^\infty E_i\right) = 1$.

۱۷- برای دنباله ای از پیشامدهای E_i ، $i \geq 1$ ، پیشامد جدید $\lim_i \sup E_i$ را به صورت مجموعه تمام برآمدهایی که در بینهایت E_i ، $i \geq 1$ ، وجود دارند تعریف می کنیم.
نشان دهید که

$$\limsup_i E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$$

۱۸- نشان دهید که اگر $\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) < \infty$ ، آن گاه $P(\limsup_i E_i) = 0$. این یک نتیجه مهم است و بیان می کند که اگر $\sum_{1}^{\infty} P(E_i) < \infty$ ، آن گاه احتمال این که تعدادبی نهایت E_i رخ دهد برابر 0 است .

راهنمایی : از نامساوی زیر استفاده کنید

$$\limsup_i E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$$

مسائل

بخشهای ۱-۲

۱- در جعبه ای ۳ مهره است : ۱ قرمز، ۱ سبز و ۱ آبی . آزمایشی عبارت است از بیرون آوردن یک مهره از جعبه و سپس قراردادن آن در جعبه و استخراج مهره دوم از آن ، فضای نمونه را مشخص کنید . بدون جایگزاری مهرهٔ اول، مسأله را حل کنید .

۲- تاسی را پی در پی می اندازیم تا ۶ بیاید، در چه نقطه ای آزمایش متوقف می شود؟ فضای نمونه این آزمایش چیست؟ اگر E_n این پیشامد باشد که برای تکمیل آزمایش لازم است تاس n بار پرتاب شود، چه نقاطی از فضای نمونه در E_n خواهند بود؟ پیشامد $\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_n\right)^c$ چیست؟

۳- دو تاس را می اندازیم . اگر E پیشامدمجموع دو تاس فرد و F پیشامد حداقل یکی از تاسها ۱ و G پیشامدمجموع ۵ باشد، پیشامدهای EF، $E \cup F$ ، FG ، EF^c و EFG راتوصیف کنید .

۴- A و B و C سکه ای را پرتاب می کنند . اولین کسی که شیر بیاورد برنده خواهد بود . فضای نمونه این آزمایش را می توان به صورت زیر تعریف کرد .

$$S = \begin{cases} 1, 01, 001, 0001, \ldots, \\ 0000 \cdots \end{cases}$$

(الف) فضای نمونه را تعبیر کنید.

(ب) پیشامدهای زیر را بر حسب S تعریف کنید.

A (i) برنده شود = A

B (ii) برنده شود = B

$(A\cup B)^c$ (iii)

فرض کنیدابتدا A سکه را پرتاب می کندسپس B وازآخر C وبه همین ترتیب الی آخر.

بخشهای ۳-۶

۱- شهری با جمعیت ۱۰۰۰۰۰ نفر دارای ۳ روزنامه است : I و II و III . نسبت اشخاصی که این روزنامه ها را می خوانند به قرار زیر است :

I : ۱۰ درصد ،	I و II : ۸ درصد ،	I و II و III : ۱ درصد
II : ۳۰ درصد ،	I و III : ۲ درصد	
III : ۵ درصد ،	II و III : ۴ درصد	

(این فهرست به عنوان مثال فرض می کند که ۸۰۰۰ نفر روزنامه I و II را می خوانند)

(الف) تعداد افرادی را پیدا کنید که فقط یک روزنامه را می خوانند.

(ب) چند نفر حداقل دو روزنامه را می خوانند.

(ج) اگر I و III روزنامه صبح و II روزنامه عصر باشد، چند نفر حداقل یک روزنامه صبح و یک روزنامه عصر را می خوانند؟

(ت) چند نفر فقط یک روزنامه صبح و یک روزنامه عصر را می خوانند ؟

۲- داده های زیر از مطالعهٔ یک گروه ۱۰۰۰ نفری از مشترکین یک مجله به دست آمده است : در ارتباط با جنسیت، وضع تأهل و تحصیلات، در این داده ها ۳۱۲ مرد، ۴۷۰ متأهل ۵۲۵ فارغ التحصیل دانشکده، ۴۲ مرد فارغ التحصیل دانشکده، ۱۴۲ متأهل فارغ التحصیل دانشکده، ۸۶ مرد متأهل و ۲۵ مرد متأهل فارغ التحصیل وجود داشت. نشان دهید که تعداد گزارش داده شده باید اشتباه باشد.

راهنمایی : فرض کنید M ، W و G به ترتیب مجموعه مردان، متاهلان و فارغ التحصیلان

دانشکده باشد. از ۱۰۰۰ نفر یکی را بتصادف انتخاب کرده و با استفاده از حکم ۴-۴ نشان دهید که اگر اعداد فوق صحیح باشند، آن گاه $P(M \cup W \cup G) > 1$.

۳- یک دست ورق بازی توزیع می شود. احتمال آن که چهاردهمین ورق توزیع شده آس باشد چقدر است؟ احتمال این که اولین آس چهاردهمین ورق توزیع شده باشد چقدر است؟

۴- اگر فرض کنیم $\binom{52}{5}$ دست پوکر هم احتمال باشد. احتمال هریک از توزیعهای زیر چقدر است:

(الف) یک فلش؟ (یک دست را فلش گوییم اگر ۵ ورق آن همه از یک خال باشند).

(ب) یک جفت؟ (یعنی ورقها به صورت a و a و b و c و d باشد به قسمتی که a و b و c و d همه متمایز باشند.

(پ) دو جفت؟ (یعنی ورقها به صورت a و a و b و b و c باشد به قسمتی که a و b و c متمایز باشند).

(ت) سه ورق از یک خال؟ (یعنی ورقها به صورت a و a و a و b و c باشد به قسمتی که متمازی باشند).

(ث) چهار ورق مشابه؟ (یعنی ورقها به صورت a و a و a و a و b باشد).

۵- بازی پوکر با تاس عبارت است از ریختن ۵ تاس باهم. نشان دهید که

(الف) P(هیچ دو تا مساوی نباشند) = ۰٫۰۹۲۶

(ب) P (یک جفت) = ۰٫۴۶۳

(پ) P (دو جفت) = ۰٫۲۳۱۵

(ت) P(سه تا مساوی) = ۰٫۱۵۴۳

(ث) P (فول) = ۰٫۰۳۸۶

(ج) P(چهار تا مساوی) = ۰٫۰۱۹۲

(چ) P(۵ تا مساوی) = ۰٫۰۰۰۸

۶- اگر ۸ رخ بتصادف روی صفحه شطرنج گذاشته شود مطلوب است احتمال آن که هیچ کدام از آنها دیگری را نگیرد. یعنی احتمال این که هیچ سطر یا ردیف بیش از یک رخ نداشته باشد.

۷- دو ورق بتصادف از یک دست ورق پوکر انتخاب می شود. احتمال این که یک ورق آس و دیگری یکی از ورقهای ده ، سرباز، بی بی یا شاه باشد چقدر است؟

۸- اگر دو تـاس ریختـه شونـد، احتمال آن که مجموع آنهاَ برابر i شود چقدر است؟ آن را برای $i = 2, 3, \ldots, 12$ محاسبه کنید.

۹- دو تاس ریخته می شوندتامجموع آنها ۵یا۷ شود. مطلوب است احتمال آن که ۵ اول رخ دهد.

راهنمایی: فـرض کنیـد E_n این پیشامـد باشـد کـه یـک ۵ در ریختن n ام رخ داده است و در $n - 1$ ریختن قبل هیچ ۵ یا ۷ رخ نداده است. احتـمال $P(E_n)$ را محـاسبه کرده و نـشان دهید که احتمال مطلوب برابر $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$ است.

۱۰- یک بازی با تاس به صورت زیر است:

یکی از بازیکنهـا دو تاس را می ریزد. اگـر مجـمـوع تاسـهـا ۲، ۳ یا ۱۲ شـود بازی را می بازد؛ اگر مـجموع ۷ یا ۱۱ شود بازی را می برد. اگـر برآمد چیز دیگری شود بازیکن تاسـهـا را می ریزد تا برآمـد نخسـتین یا یک ۷ به دست آید. اگر اول ۷ به دست آید با زنده خـواهد بود ولی اگر برآمـد نخست قـبل از ۷ دوباره رخ دهد بازیکن برنده است. احتـمال برد بازیکن را در این بازی محاسبه کنید.

راهنمایی: فرض کنید E_i این پیشامد باشـد که برآمـد نخسـت i است و بازیکن برنده شده است. احتمال مطلوب عبارت است از $\sum_{i=2}^{12} P(E_i)$. برای محاسبهٔ $P(E_i)$ پیشامدهای $E_{i,n}$ را به صـورت پیشـامد مجـموع نخسـت i و بازیکن در ریختن n ام برنده شده است تعریف کنید. ثابت کنید $P(E_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_{i,n})$

۱۱- جعبه‌ای دارای ۳ مهـره قرمـز و ۷ مهـره سیاه است. بازیکن A و B متـوالیاً از ایـن جعـبه مهره‌ای خارج می کنند تا یک مهره قرمز انتخاب شود. مطلوب است احتمال آن که A مهره قـرمز را انتـخاب کند. (A مـهره اول را خـارج می کند و سـپس B و الی آخـر، و انتخـاب مهره ها بدون جایگذاری صورت می گیرد).

۱۲- جعـبه‌ای دارای ۵ مهـره قرمـز و ۶ مهره آبی و ۸ مهـرهٔ سبـز است. اگـر ۳ مهـره بتصادف انتخـاب کنیم، احتمـال آن که همرنگ باشند چقـدر است؟ با رنگهای مخـتلف باشـند چقدر است؟ مسـألـه را تکرار کنید بـا این فرض کـه پس از خـارج شدن مـهرهٔ اول رنگ آن را ثبت کرده و آن را قـبل از استخراج مـهره دوم در جعبـه قرار می دهیم. این عمل را نمونه گیری با جایگذاری گوییم.

۱۳- جعبهٔ A دارای ۳ مهره قرمز و ۳ مهره سیاه است و جعبهٔ B دارای ۴ مهره قرمز و ۶ مهره

سیاه است. اگر مهره‌ای بتصادف از هر جعبه انتخاب شود، احتمال آن که مهره‌ها همرنگ باشند چقدر است؟

۱۴- در یک بازی بسکتبال سه نفره، یک نفر گارد یک نفر فوروارد و یک نفر سانتر است. اگر یک نفر بتصادف از هریک از سه تیم انتخاب شود، احتمال آن که یک تیم کامل تشکیل دهند چقدر است؟ احتمال آن که هر سه یک نقش داشته باشند چقدر است؟

۱۵- گروهی از b پسر و g دختر بطور تصادفی در یک صف قرار می گیرند ـ یعنی فرض می کنیم $(b+g)!$ جایگشت هم احتمال هستند. احتمال این که نفر i ام $1 \le i \le b+g$ دختر باشد چقدر است؟

۱۶- در جنگلی ۲۰ گوزن وجود دارد، که از آنها ۵ تا گرفته شده پس از علامت گذاری رها می شوند. بعد از مدتی ۴ گوزن از ۲۰ گوزن گرفته می شود. احتمال این که دو گوزن گرفته شده علامت دار باشند چقدر است؟ چه فرضهایی را در نظر می گیرید.

۱۷- شهری ۵ هتل دارد. اگر ۳ نفر در یک روز به هتل بروند احتمال این که هرکدام در یک هتل ساکن شده باشند چقدر است؟ چه فرضهایی را در نظر می گیرید.

۱۸- شهری دارای ۴ تعمیرگاه تلویزیون است. اگر ۴ تلویزیون خراب شود، احتمال این که دقیقاً i تعمیرگاه مورد استفاده قرار گیرد چقدر است؟ مسأله را برای ۴ و ۳و۲و۱ $=i$ حل کنید. چه فرضهایی را در نظر می گیرید.

۱۹- اگر تاسی را ۴ بار بیندازیم، احتمال این که ۶ حداقل یک بار بیاید چقدر است؟

۲۰ - دو تاس را n بار می اندازیم. احتمال حداقل یک جفت شش را محاسبه کنید. n باید به چه بزرگی باشد تا این احتمال حداقل $\frac{1}{2}$ شود؟

۲۱- اگر N نفر که A و B نیز جزء آنها هستند بطور تصادفی در یک صف مرتب شوند احتمال این که A و B پهلوی هم قرار گیرند چقدر است؟ اگر دور یک میز گرد بنشینند این احتمال چقدر است؟

۲۲- از گروهی شامل ۳ دانش‌آموز دبستانی، ۴ دانش‌آموز راهنمایی و ۴ دبیرستانی و ۳ دانشگاهی یک کمیته ۴ نفری بتصادف انتخاب می کنیم. احتمال این که کمیته شامل (الف) یک نفر از هر کلاس باشد. (ب) ۲ دانش‌آموز راهنمایی و ۲ دانش‌آموز دبیرستانی باشد و (پ) فقط دانش‌آموزان راهنمایی و دبیرستانی باشند چقدر است؟

۲۳- زنی n کلید دارد، که از آنها یکی در را باز می کند. اگر کلیدها را بتصادف امتحان کند، و

کلیدهایی که در را باز نمی کنند کنار بگذارد، احتمال این که در را با کلید k ام باز کند چقدر است؟ اگر کلیدها را کنار نگذارد این احتمال چقدر خواهد بود؟

۲۴- ۲۰ نفر را در نظر بگیرید، احتمال این که در ۱۲ ماه سال ۴ ماه دقیقاً شامل ۲ روز تولد و ۴ ماه دیگر شامل ۳ روز تولد باشد چقدر است؟

۲۵- یک گروه شامل ۶ مرد و ۶ زن بطور تصادفی به دو گروه ۶ نفری تقسیم می شوند احتمال این که تعداد مردان هر دو گروه یکسان باشند چقدر است؟

۲۶- در یک دست بریج، احتمال آن که شما ۵ خاج و طرف مقابل ۸ خاج باقیمانده را داشته باشد چقدر است؟

۲۷- فرض کنید n مهره بتصادف در N محل توزیع می شود. مطلوب است احتمال این که m مهره در محل اول قرار گیرد. فرض کنید تمام N^n ترتیب هم احتمال هستند.

۲۸- در گنجه ای ۱۰ جفت کفش قرار دارد. اگر ۸ جفت بتصادف انتخاب شود احتمال این که سه کفش آن (الف) جفت نباشد و (ب) دقیقاً یک جفت باشد چقدر است؟

۲۹- یک تیم بسکتبال از ۶ بازیکن سیاه و ۴ سفید تشکیل شده است. اگر بازیکنها بطور تصادفی به صورت هم اتاقی تقسیم شوند. مطلوب است احتمال آن که ۲ جفت سیاه و سفید هم اتاقی باشند.

۳۰- اگر ۴ زوج متأهل در یک ردیف قرار گیرند، مطلوب است احتمال آن که هیچ شوهری پهلوی همسرش قرار نگیرد.

۳۱- مطلوب است احتمال آن که یک دست بریج حداقل فاقد یک خال باشد. توجه کنید که جواب به صورت زیر نیست

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}$$

(چرا؟)

راهنمایی : از حکم ۴-۴ استفاده کنید.

۳۲- مطلوب است احتمال این که یک دست ۱۳ تایی (الف) شامل یک آس و یک شاه از یک خال باشد، (ب) حداقل شامل یک ۴ تایی از ۱۳ نوع ورق باشد.

فصل سوم

احتمال شرطی و استقلال

۱ - مقدمه

در این فصل یکی از مهمترین مفاهیم نظریهٔ احتمال یعنی احتمال شرطی را معرفی می کنیم. این مفهوم از دو جهت با اهمیت است. اول این که، غالباً به محاسبه احتمالهایی علاقه مندیم که پاره‌ای اطلاعات مربوط به نتیجهٔ آزمایش، در دسترس است، در چنین وضعیتی احتمالهای مطلوب، احتمالهای شرطی اند. دوم این که، حتی هنگامی که دسترسی به هیچ گونه اطلاعات نسبی نداریم، اغلب استفاده از احتمالهای شرطی به عنوان ابزار، به ما امکان می دهد، احتمالهای مورد نظر را ساده تر محاسبه کنیم.

۲ - احتمالهای شرطی

دو تاس را می ریزیم و فرض می کنیم که هریک از ۳۶ برآمد ممکن با احتمال مساوی رخ دهد و بنابراین احتمال هریک از آنها $\frac{۱}{۳۶}$ است. به علاوه فرض کنید که مشاهده شود تاس اول دارای ۳ است. اکنون با معلوم بودن این مطلب، احتمال این که مجموع دو تاس برابر ۸ باشد، چیست؟ برای محاسبهٔ این احتمال به طریق زیر استدلال می کنیم: با فرض این که تاس اول ۳ باشد، آزمایش مورد بحث حداکثر دارای ۶ برآمد ممکن (۱ و ۳)، (۳ و ۳)، (۴ و ۳)، (۵ و ۳) است. چون هر یک از این برآمدها در اصل دارای احتمال یکسانند، این

برآمدهاهم احتمال هستند، یعنی، با دانستن این که تاس اول برابر ۳ است، احتمال شرطی هریک از برآمدهای (۱و۳) (۲و ۳)، (۳ و ۳) ، (۴و ۳)، (۵و ۳)و (۶ و ۳) برابر $\frac{1}{6}$ است، در صورتی که احتمال (شرطی) ۳۰ نقطهٔ دیگر در فضای نمونه صفر است. بنابراین احتمال موردنظر $\frac{1}{6}$ است.

اگر E و F به ترتیب پیشامدهای مجموع خالهای دو تاس برابر ۸ و تاس اول برابر ۳ را نمایش دهند، احتمالی را که در بالا به دست آمد، احتمال شرطی این که « E رخ دهد در صورتی که F رخ داده است» می‌نامند و با

$$P(E|F)$$

نشان داده می‌شود.

فرمول کلی برای P(E | F) که برای کلیهٔ پیشامدهای E و F معتبر است به طریقی مشابه حاصل می‌شود: اگر پیشامد F رخ بدهد، آن گاه برای این که E رخ دهد لازم است که برآمد واقعی نقطه ای در E و F یعنی در EF باشد. اکنون، با علم به این که F رخ داده است، نتیجه می‌شود که F فضای نمونهٔ جدید ما کاهش یافته است، بنابراین، احتمال این که پیشامد E | F رخ دهد برابر است با احتمال EF نسبت به احتمال F . یعنی تعریف زیر را داریم

تعریف

اگر $P(F) > 0$ ، آن گاه

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \qquad (۱-۲)$$

مثال ۲ الف. سکه ای را دوبار پرتاب می کنیم. اگر فرض کنیم که هر چهار نقطه در فضای نمونهٔ $S = \{ (H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$ دارای احتمال برابرند، احتمال شرطی این که در هر دو پرتاب شیر ظاهر شود، در صورتی که می دانیم پرتاب اول شیر بوده است چقدر است؟

حل : اگر $E = \{(H,H)\}$ پیشامد هردو پرتاب شیر و $F = \{(H,H), (H,T)\}$ پیشامد پرتاب اول شیر باشد، در این صورت احتمال مطلوب عبارت است از

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$
$$= \frac{P(\{(H, H)\})}{P(\{(H, H), (H, T)\})}$$
$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

مثال ۲ ب ـ کیسه ای محتوی ۱۰ مهرهٔ سفید، ۵ مهره زرد و ۱۰ مهره سیاه است. مهره‌ای بتصادف از کیسه انتخاب شده و مشاهده می شود که این مهره سیاه نیست. احتمال این که مهره زرد باشد چقدر است.

حل : فرض کنید Y پیشامد زرد بودن و B^c پیشامد سیاه نبودن مهره انتخاب شده باشد. از معادلهٔ (۲-۱) داریم.

$$P(Y|B^c) = \frac{P(YB^c)}{P(B^c)}$$

با وجود این، $YB^c = Y$ ، زیرا این مهره زرد است و سیاه نیست اگر فقط اگر زرد باشد. بنابراین، با این فرض که انتخاب هریک از ۲۵ مهره دارای شانس برابر باشد، داریم

$$P(Y|B^c) = \frac{\frac{5}{25}}{\frac{15}{25}} = \frac{1}{3}$$

باید توجه داشت که این احتمال را می توانستیم با در نظر گرفتن فضای نمونه کاهش یافته به دست آوریم یعنی، در صورتی که می دانیم مهرهٔ منتخب سیاه نیست، این مسأله به محاسبهٔ این احتمال که «یک مهره که بتصادف از یک کیسه شامل ۱۰ مهره سفید و ۵ مهرهٔ زرد بیرون کشیده می شود زرد باشد» تبدیل می شود که بروشنی برابر $\frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$ است.

وقتی که کلیه پیشامدهای ساده را هم احتمال فرض می کنیم، غالباً محاسبهٔ یک احتمال شرطی با در نظر گرفتن فضای نمونهٔ کاهش یافته ساده تر از کاربرد مستقیم (۲-۱) است.

مثال ۲ پ . در بازی بریج ، ۵۲ کارت بطور مساوی بین ۴ بازیکن موسوم به شرق، غرب، شمال و جنوب تقسیم می شود. اگر شمال و جنوب بین کارتهایشان کلاً ۸ پیک داشته باشند، احتمال این که شرق، ۳ پیک از ۵ پیک باقیمانده را دارا باشد چقدر است؟

حل : ساده ترین راه برای حل این مسأله احتمالاً استفاده از فضای نمونهٔ کاهش یافته

است. یعنی با دانستن این که شمال ـ جنوب بین ۲۶ کارت خود کلاً ۸ پیک دارند، ۲۶ کارت باقی می ماند که دقیقاً ۵ عدد از آنها پیک است که باید بین شرق و غرب توزیع شود. چون هر توزیع هم احتمال است، لذا این احتمال شرطی که شرق دقیقاً ۳ پیک بین ۱۳ کارت خودش داشته باشد برابر است با

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{21}{10}}{\binom{26}{13}} = .339$$

مثال ۲ ت: مؤسسه ای که آقای حامد در آن کار می کند یک مهمانی شام پدر ـ پسر، برای کارمندانی که حداقل یک فرزند پسر دارند ترتیب داده است. هریک از این کارمندان به همراه پسر ارشدشان برای شرکت در مهمانی دعوت شده اند. اگر بدانیم که حامد دارای دو فرزند است، احتمال شرطی این که هردو پسر باشند، در صورتی که می دانیم آقای حامد به مهمانی دعوت شده است چقدر است؟ فرض کنید فضای نمونه با $S = \{(b,b), (b,g), (g,b), (g,g)\}$ داده شده است و کلیه پیشامدهای ساده هم احتمال اند [مثلاً (b, g) به این معناست که فرزند بزرگتر پسر و فرزند کوچکتر دختر است] .

حل: دانستن این که حامد به مهمانی شام دعوت شده است هم ارز با این است که وی حداقل یک پسر دارد. بنابراین، اگر E پیشامدی را که هردو فرزند پسرند و F پیشامدی را که لااقل یکی از آنها پسر است نمایش دهند، احتمال مطلوب $P(E \mid F)$ از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} P(E|F) &= \frac{P(EF)}{P(F)} \\ &= \frac{P(\{(b,b)\})}{P(\{(b,b),(b,g),(g,b)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

بسیاری از خوانندگان بغلط استدلال می کنند که این احتمال شرطی دو پسر برابر $\frac{1}{۲}$ است، در صورتی که احتمال صحیح آن $\frac{1}{۳}$ است، زیرا دلیل این گروه آن است که آن فرزند آقای حامد که در مهمانی شرکت نکرده است با احتمال مساوی پسر یا دختر است. زیرا در ابتدا ۴ برآمد هم احتمال وجود داشت. اکنون، آگاهی از این که حداقل یک فرزند پسر است با دانستن این که این برآمد (g, g) نیست هم ارز است. بنابراین برای ماسه برآمد هم احتمال $(b, b), (b, g), (g, b)$ باقی می ماند که نشان می دهد این فرزند حامد که در مهمانی شرکت

نمی کند احتمال دختر بودنش دو برابر پسر بودن است.

اگر هر دو طرف معادلهٔ (۲-۱) را در P(F) ضرب کنیم، حاصل می شود.

$$P(EF) = P(F)P(E|F) \tag{۲ - ۲}$$

معادلهٔ (۲-۲) بیانگر آن است که احتمال رویداد E و F برابر احتمال رویداد F ضرب در احتمال شرطی E در صورتی که می دانیم F رخ داده است می باشد. معادلهٔ (۲-۲) غالباً در محاسبهٔ احتمال اشتراك پیشامدها بسیار مفید است.

مثال ۲ ث. مریم در این که درس فرانسه یا درس شیمی را انتخاب کند تردید دارد. با وجودی که وی شیمی را ترجیح می دهد ولی در ارزیابی که دارد احتمال گرفتن نمره (آ) در درس فرانسه را $\frac{1}{2}$ و در درس شیمی را تنها $\frac{1}{3}$ می داند. اگر مریم تصمیم خود را بر اساس پرتاب یک سکه سالم بگیرد، احتمال این که وی در درس شیمی نمرهٔ (آ) بگیرد چقدر است؟

حل: اگر فرض کنیم C پیشامدی که مریم شیمی را انتخاب کند و A پیشامدی که وی از هر درسی انتخاب کرده است نمرهٔ (آ) بگیرد را نشان می دهند، آن گاه احتمال مطلوب برابر P(CA) است. این احتمال با استفاده از معادلهٔ (۲-۲) به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned} P(CA) &= P(C)P(A|C) \\ &= (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

مثال ۲ ج. فرض کنید کیسه ای شامل ۸ گلولهٔ قرمز و ۴ گلولهٔ سفید است. دو گلوله بدون جایگذاری از کیسه بیرون می آوریم. اگر در هر استخراج احتمال انتخاب شدن هر گلوله در کیسه برابر باشد، احتمال این که هردو گلولهٔ استخراج شده قرمز باشند چقدر است؟

حل: فرض کنید R_1 و R_2 به ترتیب پیشامدهایی را که گلوله اول و دوم استخراج شده قرمز است نمایش می دهد. اکنون با دانستن این که گلوله اول استخراج شده قرمز است، پس گلوله های باقیمانده در کیسه ۷ قرمز و ۴ سفید است و بنابراین $P(R_2|R_1) = \frac{7}{11}$. چون واضح است که $P(R_1) = \frac{8}{12}$، احتمال مطلوب عبارت است از

$$\begin{aligned} P(R_1R_2) &= P(R_1)P(R_2|R_1) \\ &= (\tfrac{2}{3})(\tfrac{7}{11}) = \tfrac{14}{33} \end{aligned}$$

واضح است که این احتمال را می توانستیم از

$$P(R_1R_2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$$

محاسبه کنیم.

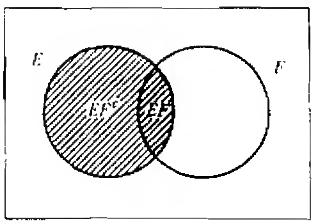
۳- فرمول بیز

فرض کنید E و F دو پیشامد باشند، E را می توان به صورت زیر نوشت

$$E = EF \cup EF^c$$

پس برای این که نقطه ای در E باشد، این نقطه یا باید هم در E و هم در F باشد یا در E بوده ولی در F نباشد. (شکل ۳-۱ را ببینید). چون EF و EF^C دو به دو ناسازگارند، بنابر اصل موضوع (۳) داریم

$$\begin{aligned} P(E) &= P(EF) + P(EF^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)[1 - P(F)]. \end{aligned} \qquad (۳-۱)$$



شکل۳-۱ $E = EF \cup EF^C$. EF ناحیه سایه خورده پر رنگ EF^C = ناحیهٔ سایه خورده

معادله (۳-۱) بیانگر آن است که احتمال پیشامد E برابر است با میانگین موزون احتمالی شرطی E در صورتی که می دانیم F رخ داده است و احتمال شرطی E با فرض این که F رخ نداده است. هر احتمال شرطی به اندازهٔ احتمال پیشامدی که به آن مشروط شده است وزن داده شده است. این فرمول بسیارسودمند است زیرا با استفاده از آن می توانیم احتمال یک پیشامد را ابتدا با

مشروط کردن آن بر رخ دادن یا رخ ندادن یک پیشامدتعیین کنیم. یعنی موارد زیادی وجود دارد که محاسبهٔ مستقیم احتمال یک پیشامددشوار است، درصورتی که اگر بدانیم پیشامد معین دومی رخ داده یانداده است محاسبه آن ساده است، باچندمثال آن راتوضیح می دهیم.

مثـال ۳ الف. (قسمت ۱). شرکت بیمه ای بر این باور است که افراد را می توان به دو گروه تقسیم کرد: گروهی که مستعد تصادف اند و گروهی که نیستند. آمارهای این شرکت نشان می دهدکه یک فردمستعد تصادف، با احتمال ۰٫۴ تصادفی در زمان معینی در ظرف یک دورهٔ یک ساله معین خواهد داشت، درصورتی که این احتمال برای یک فرد فاقد این استعداد به ۰٫۲ کاهش می یابد. اگر فرض کنیم که ۳۰ درصدجامعه ای مستعدتصادف است، احتمال این که بیمه گذارجدیدی درظرف مدت یک سال از قرار داد بیمه، یک تصادف داشته باشد چقدر است؟

حل: احتمال مطلوب را ابتدا با شرط این که آیا بیمه گذار مستعد تصادف است یا خیر، به دست می آوریم. فرض کنید A_1 پیشامدی را که بیمه گذار در ظرف یک سال از خرید یک تصادف داشته باشد و A پیشامدی را که بیمه گذار مستعد تصادف است نشان دهد، در این صورت احتمال مطلوب $P(A_1)$ عبارت است از

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1|A)P(A) + P(A_1|A^c)P(A^c) \\ &= (.4)(.3) + (.2)(.7) = .26 \end{aligned}$$

مثال ۳ الف (قسمت ۲): فرض کنید بیمه گذار جدیدی در ظرف یک سال از خرید بیمه یک تصادف دارد. احتمال این که این فرد مستعد تصادف باشد چقدر است؟

$$\begin{aligned} P(A|A_1) &= \frac{P(AA_1)}{P(A_1)} \\ &= \frac{P(A)P(A_1|A)}{P(A_1)} \\ &= \frac{(.3)(.4)}{.26} = \frac{6}{13}. \end{aligned}$$

مثال ۳ ب. در پاسخ به سؤالی در آزمونی چند گزینه ای یک دانشجو یا سؤال را می داند، یا آن را حدس می زند. فرض کنید p احتمالی باشد که این دانشجو پاسخ را می داند و $1-p$ احتمالی که پاسخ را حدس می زند. فرض کنید دانشجویی که پاسخ را حدس می زند با احتمال $\frac{1}{m}$ که m تعداد گزینه هاست، پاسخ درست بدهد. احتمال شرطی این که دانشجویی پاسخ

سؤال را بداند در صورتی که می دانیم به آن پاسخ درست داده است چقدر است؟

حل : فرض کنید C و K به ترتیب پیشامدی را که این دانشجو به سؤال پاسخ درست دهد و پیشامدی را که وی واقعاً پاسخ را می داند است نمایش دهند. اکنون

$$\begin{aligned}P(K|C) &= \frac{P(KC)}{P(C)}\\&= \frac{P(C|K)P(K)}{P(C|K)P(K)+P(C|K^c)P(K^c)}\\&= \frac{p}{p+(1/m)(1-p)}\\&= \frac{mp}{1+(m-1)p}\end{aligned}$$

بنابراین، برای مثال اگر $m = 5$ و $P = \frac{1}{2}$ ، احتمال این که دانشجویی پاسخ سؤالی را که به آن پاسخ درست داده می دانسته است برابر $\frac{۵}{۶}$ است.

مثال ۳ پ . یک آزمایشگاه آزمون خون در تشخیص یک بیماری وقتی این بیماری واقعاً وجود دارد ۹۵ درصد موفق است. با وجود این ، این آزمون نتیجهٔ « مثبت نادرست» برای یک درصد از افراد سالمی که آزمون می شوند نیز فراهم می کند. (یعنی اگر فرد سالمی آزمون شود، با احتمال ۰/۰۱ نتیجه این آزمون او را بیمار تشخیص می دهد). اگر ۰/۵ درصد این جامعه واقعاً مبتلا به این بیماری باشند، احتمال این که فردی مبتلا به بیماری باشد در صورتی که می دانیم نتیجهٔ آزمون مثبت است، چقدر است؟

حل : فرض کنید D پیشامدی را که فرد مورد آزمون مبتلا است و E پیشامدی را که نتیجهٔ آزمون مثبت است نمایش دهند. احتمال مطلوب $P(D|E)$ از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}P(D|E) &= \frac{P(DE)}{P(E)}\\&= \frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D)+P(E|D^c)P(D^c)}\\&= \frac{(.95)(.005)}{(.95)(.005)+(.01)(.995)} = \frac{95}{294} \approx .323\end{aligned}$$

بنابراین تنها ۳۲ درصد از افرادی که نتیجه آزمون آنها مثبت می شود واقعاً مبتلا به بیماری اند. چون بسیاری از دانشجویان غالباً با این نتیجه شگفت زده می شوند (زیرا انتظار دارند که رقم

حاصل بسیار بزرگتر از این باشد به دلیل این که این دستگاه آزمون خون دستگاه خوبی است)، احتمالاً ارزش این را دارد که استدلال دیگری را هرچند ضعیف تر از اولی، که ملموستر است، در زیر ارائه دهیم.

چون ۰/۵ درصد از این جامعه مبتلا به این بیماری است، نتیجه می شود که بطور متوسط ۱ نفر از هر ۲۰۰ نفر که آزمون می شوند مبتلاست. این آزمون با احتمال ۰/۹۵ بطور درست تأیید می کند که این فرد مبتلا به بیماری است. بنابراین بطور متوسط از هر ۲۰۰ نفر که آزمون می شوند این آزمون بدرستی تأیید می کند که ۰/۹۵ افراد مبتلا هستند. با وجود این از سوی دیگر، (بطور متوسط) از هر ۱۹۹ فرد سالم، این آزمون بغلط بیان می کند که (۰/۰۱)(۱۹۹) نفر از این افراد مبتلا هستند. بنابراین، برای هر ۰/۹۵ افراد مبتلا که این آزمون بدرستی آنها را مبتلا اعلام می کند، (بطور متوسط) (۰/۰۱) (۱۹۹) فرد سالم وجود دارد که این آزمون بنادرست بیمار اعلام می کند . در نتیجه ، نسبت دفعاتی که نتیجه آزمون وقتی اعلام می کند که فردی بیمار است برابر است با

$$\frac{.95}{.95+(199)(.01)}=\frac{95}{294}\approx .323$$

معادله (۳-۱) هرگاه بخواهیم احتمالهای شخصی فردی را به کمک اطلاعات اضافی مجدداً ارزیابی کنیم نیز سودمند واقع می شود، مثالهای زیر را در نظر بگیرید .

مثال ۳ ت : پزشکی را در نظر بگیرید که به مشکل زیر می اندیشد: اگر ۸۰ درصد اطمینان داشته باشم که مریضم مبتلا به این بیماری است، همواره عمل جراحی را توصیه خواهم کرد، در صورتی که به این اندازه مطمئن نباشم، آزمونهای اضافی را که پر هزینه و بعضاً دردآورند توصیه خواهم کرد. اکنون، در ابتدای امر ۶۰ درصد اطمینان داشتم که بیمار مبتلا به این مرض است، و بدین ترتیب آزمون سری A را تجویز کردم، آزمونی که اگر مریض مبتلا به بیماری باشد نتیجه اش مثبت است و تقریباً هرگز نتیجه مثبت نیست اگر وی مبتلا نباشد. نتیجهٔ این آزمون مثبت بود و بنابراین وقتی بیمار برای اولین بار به من اطلاع داد که وی مرض قند دارد تصمیم گرفتم عمل جراحی را به وی توصیه کنم» .

این اطلاعات موضوع را پیچیده می سازد زیرا با وجود این که این امر برآورد ۶۰ درصد اولیه مرا که احتمال ابتلای بیمار به این بیماری است تغییر نمی دهد، ولی تعبیر نتایج آزمون A را تحت تأثیر قرار می دهد. زیرا آزمون A ، وقتی بیمار سالم است هرگز نتیجهٔ مثبتی

فراهم نمی کند، ولی متأسفانه در مورد بیماران قندی که از این بیماری رنج نمی برند، در ۳۰ درصد موارد نتیجه مثبت فراهم می کند. اکنون باید چه کار کرد؟ آزمونهای دیگر یا جراحی فوری؟

حل: به منظور تصمیم گیری در مورد این که عمل جراحی توصیه شود یا خیر، این پزشک ابتدا باید احتمال بروز خود را که شخص مبتلا به بیماری است در صورتی که نتیجه آزمون A مثبت است، محاسبه کند. فرض کنید D پیشامدی را که شخص مبتلاست و E که نتیجه آزمون A مثبت است را نشان می دهد. احتمال شرطی مطلوب $P(D|E)$ از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$P(D|E) = \frac{P(DE)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(D)P(E|D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c)}$$

$$= \frac{(.6)1}{1(.6) + (.3)(.4)}$$

$$= .833$$

توجه داشته باشید که احتمال نتیجه آزمون مثبت با شرط این که آیا شخص مبتلا به بیماری است یا خیر و سپس حقیقتی را که شخص مبتلا به مرض قند است به کار برده و احتمال شرطی یک نتیجهٔ مثبت، در حالی که می دانیم فرد مبتلا نیست یعنی $P(E|D^c)$، را برابر ۰/۳ به دست می آوریم. بنابراین، دکتر اکنون بیش از ۸۰ درصد اطمینان دارد که فرد مبتلا به بیماری است، باید عمل جراحی را تجویز کند.

مثال ۳ ث. در مرحلهٔ معینی از یک بررسی جنایی، بازرس مأمور ۶۰ درصد به گناهکار بودن متهم مشخصی متقاعد شده است. اکنون فرض کنید مدرك **جدیدی** که نشان می دهد جنایتکار دارای مشخصه خاصی است (از قبیل چپ دست بودن طاسی یا رنگ موی خرمایی) کشف شده است. اگر ۲۰ درصد جامعه ای دارای این مشخصه باشد، کار آگاه اکنون چقدر باید از گناهکاری متهم مطمئن شود اگر معلوم شود که متهم دارای این مشخصه است؟

حل : فرض کنید G پیشامدی را که متهم گناهکار است و C پیشامدی را که وی دارای

مشخصه جنایی است نشان می دهد، داریم.

$$\begin{aligned}P(G\mid C) &= \frac{P(GC)}{P(C)}\\ &= \frac{P(C\mid G)P(G)}{P(C\mid G)P(G)+P(C\mid G^c)P(G^c)}\\ &= \frac{1(.6)}{1(.6)+(.2)(.4)}\\ &= .882\end{aligned}$$

که در آن فرض کرده ایم احتمال این که متهم دارای این مشخصه باشد در حالی که واقعاً بی گناه است برابر ۰/۲ ، یعنی نسبتی از جامعه که دارای این مشخصه است.

مثال ۳ ج. در مسابقه قهرمانی جهانی بریج که در ماه می ۱۹۶۵ در بوئنوس آیرس برگزار شد، انجمن بریج معروف بریتانیایی مربوط به ترنس ریس و بوریس چاپیرو متهم به تقلب با استفاده از علامات انگشتان شد که می توانست تعداد قلبها در دست بازیکنان را نشان دهد. ریس و چاپیرو این اتهام را رد کردند و سرانجام یک جلسهٔ دادرسی به وسیله اتحادیهٔ بریج بریتانیا تشکیل شد. این جلسه به شکل فرآیندی رسمی با یک دادستان و تیم دفاع بود، که هر دو قدرت احضار و باز پرسی و روبروسازی از شاهدان را داشتند. در طی این فرآیندها، دادیار چند دست بازی خاصی را که توسط ریس و چاپیر و بازی شد، بررسی و اعلام کرد که بازی آنها در این چند دست با فرضی که آنها در به دست آوردن اطلاعات ناروا از خال قلب مقصرند سازگار است. در این مرحله، وکیل مدافع، خاطرنشان می سازد که بازی آنها در این دستها با بازی استاندارد آنها کاملاً سازگارست . با وجود این، شاکی مدعی است مادامی که بازی آنها با فرض گناهکاری سازگار است، این امر بایستی مدرکی مؤید این فرض محسوب شود. نظر شما دربارهٔ این استدلال شاکیان چیست؟

حل : این مسأله اساساً مسأله ای است که تعیین می کند چگونه دخالت یک مدرك جدید (در مثال بالا، این چند دست بازی) احتمال فرض خاصی را تحت تأثیر قرار می دهد. اکنون، اگر فرض کنیم H فرض خاصی را نشان را می دهد (مانند گناهکاری ریس و چاپیرو) و E مدرك جدید را، آن گاه

$$P(H|E) = \frac{P(HE)}{P(E)} = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|H^c)[1 - P(H)]} \tag{۳-۲}$$

که در آن P(H) ارزیابی ما از درستی فرض قبل از دخالت این مدرك جدید است. این مدرك جدید این فرض را در صورتی که آن را محتمل تر سازد، تقویت می کند یعنی هرگاه $P(H|E) \geq P(H)$. از معادلهٔ (۳-۲)، هرگاه

$$P(E|H) \geq P(E|H)P(H) + P(E|H^c)[1 - P(H)]$$

یا هم ارز با آن، هرگاه

$$P(E|H) \geq P(E|H^c)$$

به بیان دیگر، هر مدرك جدیدی را می توان تقویت کننده فرض خاصی در نظر گرفت. هرگاه وقوع آن وقتی این فرض درست است بیشتر از وقتی باشد که فرض نادرست است. در حقیقت، احتمال جدید این فرض به احتمال اولیه آن و نسبت این احتمالهای شرطی بستگی دارد، زیرا از معادلهٔ (۳-۲)

$$P(H|E) = \frac{P(H)}{P(H) + [1 - P(H)]\frac{P(E|H^c)}{P(E|H)}}$$

چون در مسأله مورد بحث، این بازی ورقها را تنها در صورتی می توان تقویت کننده فرض گناهکاری در نظر گرفت که چنین نحوهٔ بازی هنگامی که این دو نفر تقلب می کردند محتملتر از هنگامی باشد که تقلب نکنند. چون دادیار هرگز چنین اظهاراتی نکرده است، اظهاراتش مبنی بر این که این مدرك فرض گناهکاری را تقویت می کند معتبر نیست.

معادلهٔ (۳-۱) را می توان به طریق زیر گسترش داد: فرض کنید F_1، F_2، ...، F_n پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند، بطوری که

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$$

به بیان دیگر، دقیقاً یکی از پیشامدهای F_1، ...، F_n باید رخ دهد. با نوشتن

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} EF_i$$

و استفاده ازاین واقعیت که پیشامدهای EF_i ، $i = 1, ..., n$ دو به دو ناسازگارند، حاصل می‌شود.

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(EF_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i) \qquad (۳-۳)$$

بنابراین معادلهٔ (۳-۳) نشان می‌دهد که برای پیشامدهای مفروض F_1 ، F_2 ، ... ، F_n که یکی از آنها باید رخ دهد، چگونه می‌توان $P(E)$ را ابتدا با مشروط نمودن براین که کدام یک از F_iها رخ دهد محاسبه کرد. یعنی، معادلهٔ (۳-۳) بیانگر آن است که $P(E)$ برابر میانگین موزون $P(E|F_i)$ است که هرجملهٔ آن با احتمال پیشامدی که برآن شرطی شده است موزون شده است.

اکنون فرض کنید که E رخ داده است و می‌خواهیم تعیین کنیم کدام یک از F_j ها نیز رخ داده است. بنابر معادلهٔ (۳-۳) حکم زیر را داریم.

حکم۳-۱

$$P(F_j|E) = \frac{P(EF_j)}{P(E)}$$
$$= \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)} \qquad (۴-۳)$$

معادلهٔ (۳-۴) به فرمول بیز مشهور است که از نام فیلسوف انگلیسی توماس بیز اقتباس شده است. اگر پیشامدهای F_j را به‌عنوان «فرضهای» ممکن دربارهٔ موضوعی بپنداریم، آن گاه فرمول بیز را می‌توان چنین تعبیر کرد که چگونگی تغییرات پندارها در بارهٔ این فرضها را که قبل از آزمایش حکمفرماست (یعنی $P(F_j)$) با مدرک آزمایش بایستی اصلاح شود به ما نشان می‌دهد.

مثال ۳ g. هواپیمایی گم شده و گمان می‌رود که در یکی از مناطق سه گانهٔ ممکن به‌زمین نشسته باشد. فرض کنید $1-\alpha_i$ احتمالی-را که این هوا پیما به دنبال جستجوی منطقهٔ i ام پیدا شود در صورتی که هواپیما در حقیقت در این منطقه است، $i = 1, 2,3$ ، نشان می‌دهد (مقادیر ثابت α_i به احتمالهای چشم انداز موسومند زیرا این مقادیر احتمال نظارت بر این هواپیما را نمایش می‌دهند و عموماً می‌توان آنها را به شرایط محیطی و جغرافیایی این منطقه‌ها نسبت

داد) . احتمال شرطی این که این هواپیما در منطقهٔ i ام، ($i = 1, 2, 3$) باشد چقدر است، در صورتی که می دانیم جستجوی منطقه ۱ بدون نتیجه بوده است ؟

حل : فرض کنید R_i ، $i = 1, 2, 3$ ، پیشامدی را که این هواپیما در منطقه i ام باشد، و E پیشامدی را که جستجوی منطقه ۱ نا موفق بوده است نشان می دهد . از فرمول بیز داریم

$$\begin{aligned} P(R_1|E) &= \frac{P(ER_1)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|R_1)P(R_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(E|R_i)P(R_i)} \\ &= \frac{(\alpha_1)\frac{1}{3}}{(\alpha_1)\frac{1}{3} + (1)\frac{1}{3} + (1)\frac{1}{3}} \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2} \end{aligned}$$

برای $j = 2,3$

$$\begin{aligned} P(R_j|E) &= \frac{P(E|R_j)P(R_j)}{P(E)} \\ &= \frac{(1)\frac{1}{3}}{(\alpha_1)\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\alpha_1 + 2}, \qquad j = 2, 3 \end{aligned}$$

باید توجه داشت که احتمال بروز (یعنی شرطی) که این هواپیما در منطقه j است، در صورتی که می دانیم جستجوی منطقه i ناموفق بوده است، بزرگتر از احتمال اولیه است که هواپیما در منطقه j است هرگاه $j \neq 1$ و کمتر از احتمال اولیه است وقتی $j = 1$ ، که مسلماً بدیهی است ، زیرا پیدا نکردن هواپیما به هنگام جستجوی منطقهٔ ۱ ، به نظر می رسد که احتمال بودن هواپیما در این منطقه را کاهش داده و احتمال بودن آن را در جای دیگر افزایش می دهد . همچنین احتمال مشروط این که این هواپیما در منطقه ۱ باشد، در صورتی که می دانیم جستجوی اولین منطقه ناموفق است تابعی صعودی از احتمال چشم انداز α_1 است، که این نیز بدیهی است زیرا هر چقدر α_1 بزرگتر باشد، منطقی تر است که جستجوی ناموفق را به «بد شانسی» نسبت دهیم در مقابل این که هواپیما آن جا نباشد. بطور مشابهی $P(R_j | E)$ ، $j \neq 1$ تابعی نزولی از α است.

مثال بعدی، غالباً توسط دانشجویان آگاه به احتمال ۱ برای بردن پول از دوستان نا آگاه خود مورد استفاده قرار می گیرد.

مثال ۳ ح. فرض کنید سه کارت داریم که از نظر شکل یکسانند ولی دو طرف کارت اول به رنگ قرمز و دو طرف کارت دوم به رنگ مشکی و یک طرف کارت سوم به رنگ قرمز و طرف دیگرش به رنگ مشکی است. این سه کارت را در داخل کلاهی خوب مخلوط و ۱ کارت را بتصادف از آن بیرون کشیده و بر روی میز قرار می دهیم. اگر طرف رو شده آن به رنگ قرمز باشد، احتمال این که طرف دیگرش به رنگ مشکی باشد چقدر است؟

حل: فرض کنید BB, RR و RB به ترتیب پیشامدهای کارت منتخب تمام قرمز، تمام مشکی یا نیمی قرمزنیمی مشکی است را نشان می دهند. فرض کنیدR پیشامدی راکه طرف رو شده کارت منتخب قرمزاست نمایش می دهددراین صورت احتمال مطلوب ازرابطهٔ زیر به دست می آید.

$$P(RB|R) = \frac{P(RB\cap R)}{P(R)}$$

$$= \frac{P(R|RB)P(RB)}{P(R|RR)P(RR) + P(R|RB)P(RB) + P(R|BB)P(BB)}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})}{(1)(\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{3}) + 0(\frac{1}{3})} = \frac{1}{3}$$

بنابراین پاسخ برابر $\frac{1}{3}$ است. برخی دانشجویان پاسخ را برابر $\frac{1}{2}$ حدس می زنند با این استدلال نادرست که در صورتی که می دانیم طرف قرمز روشده است، دو امکان هم احتمال وجود دارد: یکی این که، کارت تمام قرمز، یا کارت تمام مشکی است. با وجود این اشتباه آنان در این جاست که فرض می کنند این دو امکان هم احتمالند. زیرا اگر تصور کنیم که هر کارت از دو طرف متمایز تشکیل شده است، آن گاه آزمایش دارای ۶ برآمد هم احتمال است ـ مثلاً $R_1, R_2, B_1, B_2, R_3, B_3$ ـ که در آن برآمد R_1 است اگر طرف اول کارت کلاً قرمز رو شود، R_2 است اگر طرف دوم کارت کلاً قرمز رو شود، R_3 است اگر طرف قرمز کارت قرمز ـ مشکی رو شود و به همین ترتیب الی آخر: چون طرف دیگر کارتی که طرف قرمز آن رو شده تنها در صورتی مشکی است که برآمد R_3 باشد، مشاهده می کنیم که احتمال مطلوب برابر احتمال شرطی R_3 است در صورتی که می دانیم R_1 یا R_2 یا R_3 رخ داده است، که آشکارا برابر $\frac{1}{3}$ است.

مثال ۳ ع. در یک کلینیک روانپزشکی مددکاران اجتماعی بقدری گرفتاراند که بطور متوسط تنها ۶۰ درصد از بیماران جدید بالقوه که به کلینیک تلفن می زنند موفق می شوند بلافاصله با یک مددکار اجتماعی مکالمه کنند. از ۴۰ درصد بقیه خواسته می شود که شمارهٔ تلفن خود را بدهند. حدود ۷۵ درصد موارد را یک مددکار اجتماعی در همان روز تلفنی پاسخ می دهد و ۲۵ درصد بقیه را روز بعد. تجربه در کلینیک نشان می دهد احتمال این که تماس گیرنده ای از کلینیک به منظور مشاوره دیدن کند برابر ۰٫۸ است اگر وی بلافاصله موفق به مکالمه با یک مددکار اجتماعی شود، اگر پاسخ تلفن بیمار همان روز یا روز بعد داده شود. این احتمال به ترتیب برابر ۰٫۶ و ۰٫۴ است.

۱- چه درصدی از بیماران که تماس تلفنی می گیرند برای مشاوره از کلینیک دیدن می کنند؟

۲- چه درصدی از بیماران که از کلینیک دیدن می کنند پاسخ تلفن خود را دریافت نکرده اند.

حل: پیشامدهای V ، I ، S ، F را با گزاره های زیر نشان می دهیم.

V : تماس گیرنده از کلینیک برای مشاوره دیدن می کند.

I : تماس گیرنده بلافاصله با یک مددکار اجتماعی مکالمه می کند.

S : به تماس گیرنده بعداً در همان روز پاسخ داده می شود.

F : به تماس گیرنده روز بعد پاسخ داده می شود.

در این صورت

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V|I)P(I) + P(V|S)P(S) + P(V|F)P(F) \\ &= (.8)(.6) + (.6)(.4)(.75) + (.4)(.4)(.25) \\ &= .70 \end{aligned}$$

که در آن از این واقعیت که $P(S) = (.4)\,(.75)$ و $P(F) = (.4)\,(.25)$ بهره برده ایم. پس به (۱) پاسخ دادیم و برای پاسخ دادن به (۲) توجه داریم

$$\begin{aligned} P(I|V) &= \frac{P(V|I)P(I)}{P(V)} \\ &= \frac{(.8)(.6)}{.7} = .686 \end{aligned}$$

بنابراین ۶۹ درصد بیمارانی که از کلینیک دیدن می کنند پاسخ تلفن خود را بلافاصله توسط یک مددکار اجتماعی دریافت کرده اند.

۴- پیشامدهای مستقل

مثالهای قبلی این فصل نشان می دهد که احتمال شرطی E با فرض F یعنی $P(E\mid F)$، عموماً با احتمال غیر شرطی E یعنی $P(E)$ برابر نیست. به بیان دیگر، اگر بدانیم که F رخ داده است، عموماً شانس رخ دادن E تغییر می کند. در حالتهای خاصی که $P(E\mid F)$ برابر با $P(E)$ می شود، می گوییم که E مستقل از F است. یعنی، E مستقل از F است هرگاه اطلاع از وقوع F ، احتمال رخ دادن E را تغییر ندهد.

چون $P(E\mid F)=\frac{P(EF)}{P(F)}$ ، مشاهده می کنیم E مستقل از F است اگر

$$P(EF)=P(E)P(F) \tag{۱-۴}$$

چون معادلهٔ (۴-۱) برحسب E و F متقارن است، نتیجه می شود که هرگاه E مستقل از F باشد، F نیز مستقل از E است. بنابراین تعریف زیر را داریم.

تعریف: دو پیشامد E و F را مستقل گوییم اگر معادلهٔ (۴-۱) برقرار باشد.
دو پیشامد E و F که مستقل نباشند نامستقل نامیده می شوند.

مثال ۴ الف. یک کارت بتصادف از یک دست ورق بازی ۵۲ تایی بیرون کشیده می شود. اگر E این پیشامد باشد که ورق بیرون کشیده شده یک آس است و F پیشامدی را که این ورق پیک است نشان دهد، در این صورت E و F مستقلند. این نتیجه واضح است زیرا $P(EF)=\frac{1}{52}$ در حالی که $P(E)=\frac{4}{52}$ و $P(F)=\frac{13}{52}$.

مثال ۴ ب. دو سکه را پرتاب می کنیم و فرض می کنیم هر چهار برآمد هم احتمال باشند. اگر E پیشامدی را که در سکه اول شیر ظاهر شود و F پیشامدی را که در سکه دوم خط ظاهر شود نشان دهد، آن گاه E و F مستقلند، زیرا $P(EF)=P(\{(H,T)\})=\frac{1}{4}$ در صورتی که $P(E)=P(\{(H,H),(H,T)\})=\frac{1}{2}$ و $P(F)=P(\{(H,T),(T,T)\})=\frac{1}{2}$.

مثال ۴ پ: فرض کنید دو تاس منظم را می ریزیم. فرض کنید E_1 نمایش پیشامد، مجموع تاسها برابر ۶ است و F نمایش پیشامد تاس اول ۴ است باشد. پس

$$P(E_1F)=P(\{(4,2)\})=\frac{1}{36}$$

در حالی که

$P(E_1)P(F) = (\frac{5}{36})(\frac{1}{6}) = \frac{5}{216}$

بنابراین E و F مستقل نیستند. بطور شهودی، دلیل این امر روشن است زیرا اگر علاقه‌مند به امکان ظاهر شدن ۶ (با دو تاس) باشیم، اگر اولین تاس ۴(یا هریک از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴یا ۵) را ظاهر کند باعث خرسندی است زیرا در این صورت امکان به دست آوردن مجموع کل برابر ۶ هنوز برای ما وجود دارد. از سوی دیگر اگر تاس اول ۶ بیاید موجب ناخرسندی است زیرا دیگر شانس به دست آوردن ۶ نخواهیم داشت. به بیان دیگر، شانس به دست آوردن مجموع کل برابر ۶ بستگی به برآمد تاس اول دارد، پس E_1 و F نمی‌توانند مستقل باشند.

اکنون فرض کنید که E_2 پیشامدی را که مجموع خالهای دو تاس برابر ۷ باشد، نمایش می‌دهد. آیا E_2 مستقل از F است؟ پاسخ مثبت است، زیرا

$P(E_2F) = P(\{(4, 3)\}) = \frac{1}{36}$

در حالی که

$P(E_2)P(F) = (\frac{1}{6})(\frac{1}{6}) = \frac{1}{36}$

اثبات بدیهی این مطلب که چرا پیشامد «مجموع خالها برابر ۷ باشد» مستقل از برآمد تاس اول است به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۴ ت. اگر E پیشامدی را که «رئیس جمهور آینده از حزب جمهوری خواه است» و F پیشامدی را که «در ظرف سال آینده زمین لرزهٔ شدیدی روی خواهد داد» نمایش دهند، اکثر مردم تمایل به این فرض دارند که E و F مستقلند. با وجود این، در باره این که آیا منطقی است فرض کنیم که پیشامد E و G مستقلند اختلاف نظر وجود دارد، در این جا G پیشامدی است که می‌گوید در ظرف دو سال بعد از انتخابات جنگ بزرگی روی خواهد داد.

اکنون نشان می‌دهیم که اگر E مستقل از F باشد، E مستقل از F^c نیز هست.

حکم ۴-۱

اگر E و F مستقل باشند، E و F^c نیز مستقلند

برهان: فرض کنید E و F مستقلند. چون $E = EF \cup EF^c$ واضح است که EF و EF^c دو به دو ناسازگارند، داریم

$$P(E) = P(EF) + P(EF^c) = P(E)P(F) + P(EF^c)$$

یا هم ارز آن

$$P(EF^c) = P(E)[1 - P(F)] = P(E)P(F^c)$$

حکم ثابت شده است.

پس، اگر E مستقل از F باشد، احتمال رخ دادن E با اطلاع از رخ دادن F یا عدم آن ثابت می ماند. اکنون فرض کنید E از F و همچنین از G مستقل است. آیا E الزاماً مستقل از FG است پاسخ بطور غیرمنتظره ای منفی است. مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۴ ت. دو تاس منظم را می ریزیم. گیریم E پیشامدی را که مجموع دو تاس ۶ و F پیشامدی را که تاس اول برابر ۴ و G پیشامدی را که تاس دوم برابر ۳ است، نمایش دهند. بنابر مثال ۴ ب، می دانیم که E مستقل از F است و با همان استدلال معلوم می شود که E نیز مستقل از G است، اما مستقل بودن E و FG واضح نیست [زیرا $P(E|FG) = 1$].

به نظر می رسد که از مثال ۴ پ می توان نتیجه گرفت که تعریف مناسب استقلال سه پیشامد E، F و G چیزی بالاتر از آن است که فرض کنیم کلیهٔ $\binom{3}{2}$ زوج از پیشامدها مستقلند. بنابراین به تعریف زیر رهنمون می شویم:

تعریف

سه پیشامد E، F و G مستقل گفته می شوند هرگاه

$$\begin{aligned} P(EFG) &= P(E)P(F)P(G) \\ P(EF) &= P(E)P(F) \\ P(EG) &= P(E)P(G) \\ P(FG) &= P(F)P(G) \end{aligned}$$

مسلماً می توان تعریف استقلال را به بیش از سه پیشامد گسترش داد. پیشامدهای E_1، E_2، ...، E_n مستقل نامیده می شوند، اگر برای هر زیر مجموعهٔ $E_{1'}$، $E_{2'}$، ...، $E_{r'}$، $r \leq n$، از این پیشامدها داشته باشیم

$$P(E_{1'}E_{2'} \cdots E_{r'}) = P(E_{1'})P(E_{2'}) \cdots P(E_{r'})$$

سرانجام مجموعه ای نامتناهی از پیشامدها را مستقل تعریف می کنیم اگر هر زیر مجموعهٔ متناهی از این پیشامدها مستقل باشد.

گاهی پیش می آید که احتمال تجربه تحت مطالعه، عبارت از انجام دنباله ای از زیر تجربه ها باشد. برای مثال، اگر آزمایش عبارت از پرتاب پی درپی سکه باشد، هر پرتاب را می توان یک زیر تجربه تصور کرد. در بسیاری موارد منطقی است فرض کنیم که برآمدهای هر گروه از این زیر تجربه ها اثری بر روی احتمالهای برآمدهای زیر تجربه های دیگر ندارد. اگر چنین چیزی برقرار باشد می گوییم که زیر تجربه ها مستقلند. بطور مشخص، زیر تجربه ها را مستقل گوئیم هرگاه $E_1, E_2, \ldots, E_n$ الزاماً دنباله ای مستقل از پیشامدها باشد، وقتی E_i پیشامدی باشد که رویداد آن با برآمد زیر تجربهٔ i ام کاملاً تعیین شود.

اگر هر زیر تجربه یکسان باشد ـ یعنی، اگر هر زیر تجربه دارای همان فضای نمونه (زیر نمونه) و همان تابع احتمال بر پیشامدهایش باشد ـ در این صورت این زیر تجربه ها، آزمایشها نامیده می شوند.

مثال ۴ ج. قرار است دنباله ای نامتناهی از آزمایشهای مستقل انجام شود. هر آزمایش با احتمال p به پیروزی و با احتمال $1-p$ به شکست منتهی می شود. احتمال این که

۱- لااقل ۱ پیروزی در n آزمایش اول رخ دهد،
۲- دقیقاً k پیروزی در n آزمایش اول رخ دهد،
۳- کلیهٔ آزمایشها به پیروزی منتهی شود چقدر است؟

حل: برای تعیین احتمال لااقل ۱ پیروزی در n آزمایش اول، ساده تر است ابتدا احتمال پیشامد متمم یعنی هیچ پیروزی در n آزمایش اول را محاسبه کنیم. اگر E_i پیشامد یک شکست در آزمایش i ام را نشان دهد، احتمال هیچ پیروزی، بنا بر استقلال، برابر است با

$$P(E_1E_2\cdots E_n) = P(E_1)P(E_2)\cdots P(E_n) = (1-p)^n$$

بنابر این پاسخ (۱) برابر است با $1-(1-p)^n$.

برای محاسبهٔ (۲)، هر دنبالهٔ خاصی از n برآمد اول را که شامل k پیروزی و $n-k$ شکست است درنظر می گیریم. هریک از این دنباله ها، بنا بر فرض استقلال آزمایشها، با احتمال

$p^k\ (1-p)^{n-k}$ رخ می دهد. چون $\binom{n}{k}$ از این دنباله وجود دارد ($\frac{n!}{k!(n-k)}$ جایگشت از k پیروزی و $n-k$ شکست وجود دارد) احتمال مطلوب در (۲) برابر است با

$$P\,(\text{دقیقاً k پیروزی}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

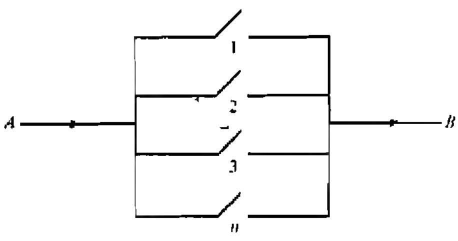
برای پاسخ دادن به (۳) ، بنابر (۱) توجه داریم احتمال این که تمام n پیشامد اول به پیروزی منجر شود با رابطه زیر داده می شود

$$P(E_1^c E_2^c \cdots E_n^c) = p^n$$

بنابراین، با استفاده از خاصیت پیوستگی احتمالها (بخش ۶ از فصل ۲) احتمال مطلوب $P\left(\bigcap_1^{\infty} E_i^c\right)$ با رابطهٔ زیر داده می شود

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) &= P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right) \\ &= \lim_n p^n = \begin{cases} 0 & \text{if } p < 1 \\ 1 & \text{if } p = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

مثال ۴ ج. دستگاهی که از n قطعهٔ جداگانه تشکیل شده است، دستگاه موازی نامیده می شود، اگر کار کردن دستگاه منوط به کار کردن حداقل یک قطعه باشد . (شکل ۳-۲ را ببینید). برای این دستگاه ، اگر قطعه i ، مستقل از قطعه های دیگر، با احتمال p_i، $i = 1, \ldots, n$ ، کار کند، احتمال این که دستگاه کار کند چقدر است .



شکل ۳-۲ دستگاه موازی: اگر جریان برق از A به B برقرار شود ، کار می کند

حل : فرض کنید A_i پیشامدی را که قطعه i کار می کند نمایش دهد . در این صورت

$$
\begin{aligned}
P\{\text{سیستم کار کند}\} &= 1 - P\{\text{سیستم کار نکند}\} \\
&= 1 - P\{\text{کلیه قطعات کار نکند}\} \\
&= 1 - P\left(\bigcap_i A_i^c\right) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i) \qquad \text{بنابر استقلال}
\end{aligned}
$$

مثال ۴ ج. آزمایشهایی مستقل ، که عبارت از پرتاب یک زوج تاس متعادل است انجام می شود . احتمال این که یک برآمد ۵ قبل از یک برآمد ۷ ظاهر شود چقدر است وقتی برآمد یک پرتاب ، مجموع خالهای تاسهاست ؟

حل : اگر E_n پیشامدی را که هیچ ۵ یا ۷ در $n - 1$ آزمایش اول ظاهر نشود و در آزمایش nام ۵ ظاهر شود را نمایش دهد ، احتمال مطلوب برابر است با

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

اکنون ، چون $\frac{4}{36}$ = {۵ در هر آزمایش}P و $\frac{6}{36}$ = {۷ در هر آزمایش}P ، بنابر استقلال آزمایشها داریم

$$P(E_n) = (1 - \tfrac{10}{36})^{n-1}\tfrac{4}{36}$$

و بنابراین

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \left(\frac{1}{9}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{9}\,\frac{1}{1 - \frac{13}{18}} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

این نتیجه را می توانستیم با استفاده از احتمالهای شرطی نیز به دست آوریم ، اگر E

پیشامدی را که یک ۵ قبل از ۷ رخ دهد نمایش دهد، می توان احتمال مطلوب P(E) را با شرطی کردن بر برآمد آزمایش اول به صورت زیر به دست آورد: فرض کنید F پیشامدی که آزمایش اول نتیجه اش ۵ و G پیشامدی که آزمایش اول نتیجه اش ۷ و H پیشامدی که آزمایش اول نتیجه اش ۵ یا ۷ نباشد را نشان می دهد و چون $EF \cup EG \cup EH$ ، داریم

$$\begin{aligned} P(E) &= P(EF) + P(EG) + P(EH) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|G)P(G) + P(E|H)P(H) \end{aligned}$$

با وجود این

$$\begin{aligned} P(E|F) &= 1 \\ P(E|G) &= 0 \\ P(E|H) &= P(E) \end{aligned}$$

دو تساوی اول واضح است. تساوی سوم نتیجه می شود، زیرا اگر برآمد اول نتیجه اش ۵ یا ۷ نباشد، آن گاه وضعیت دقیقاً مثل وقتی است که مسأله ابتدا شروع شد، یعنی آزمایش کننده یک زوج تاس متعادل را آن قدر پرتاب می کند تا این که ۵ یا ۷ ظاهر شود. به علاوه آزمایشها مستقلند، بنابراین برآمد آزمایش اول هیچ تأثیری بر پرتابهای بعدی تاسها نخواهد داشت. چون $P(F) = \frac{4}{36}$ و $PG = \frac{6}{36}$ و $p(H) = \frac{26}{36}$ ملاحظه می کنیم که

$$P(E) = \tfrac{1}{9} + P(E)\tfrac{13}{18}$$

یا

$$P(E) = \tfrac{2}{5}$$

خواننده باید توجه داشته باشد که این پاسخ کاملاً شهودی است. یعنی چون در هر پرتاب ۵ با احتمال $\frac{۴}{۳۶}$ و ۷ با احتمال $\frac{۶}{۳۶}$ رخ می دهد، بدیهی به نظر می رسد که بختهای این که ۵ قبل از ۷ ظاهر شود باید ۶ به ۴ باشد. این احتمال در واقع باید $\frac{۴}{۱۰}$ باشد.

استدلالی مشابه نشان می دهد که اگر E و F پیشامدهای دو به دو ناسازگار یک آزمایش باشد، وقتی آزمایشهای مستقل این تجربه انجام می شوند، احتمال این که پیشامد E قبل از پیشامد F رخ دهد برابر است با

$$\frac{P(E)}{P(E) + P(F)}$$

مثال بعدی مسأله ای را که جایگاه والایی در تاریخ نظریهٔ احتمال دارد ارائه می کند. این مسأله مشهور مسأله امتیازهاست. بطور کلی، مسأله این است: دو نفر بازیکن جایزه ای تعیین کرده و باهم یک بازی انجام می دهند با این قرار که جایزه نصیب برندهٔ بازی شود. اگر قبل از این که برنده معلوم شود، لازم باشد بازی متوقف شود، در صورتی که هریک دارای «امتیاز جزئی» هستند، جایزه را چگونه باید تقسیم کرد؟

این مسأله توسط شوالیه دومره که در آن عصر قماربازی حرفه ای بود برای پاسکال ریاضیدان فرانسوی مطرح شد. در کوشش برای حل این مسأله، پاسکال این اندیشه مهم را مطرح کرد که اگر قرار باشد بازی در آن امتیاز ادامه پیدا کند، باید نسبت جایزه که به این دو رقیب اختصاص داده می شود به احتمالهای برنده شدن آنان بستگی داشته باشد.

پاسکال بعضی حالات خاص را حل کرد و مهمتر آن که مکاتبه با فرانسوی مشهور فرما را آغاز کرد که شهرت زیادی به عنوان ریاضیدان کسب کرده بود. نتیجه این مکاتبات نه تنها منجر به حل کامل مسأله امتیازها شد، بلکه چارچوب حل بسیاری مسائل دیگر در ارتباط با بازیهای شانسی را تعیین کرد. این مکاتبات مشهور، که به نظر برخی تاریخ تولد نظریه احتمال را رقم زده است، از نظر جلب توجه ریاضیدانان اروپایی به احتمال نیز حایز اهمیت است، زیرا پاسکال و فرما هردو به عنوان پیشروترین ریاضیدانان عصر به شمار می رفتند. برای مثال، در فاصله زمان کوتاهی از مکاتبه آن دو، نابغه جوان آلمانی هویگنس برای بحث در مورد این مسائل و حل آنها به پاریس مسافرت کرد، و علاقه و تحرك در این رشته جدید بسرعت رو به رشد نهاد.

مثال ۴ غ. مسأله امتیازها. آزمایشهای مستقل، با احتمال پیروزی p و احتمال شکست 1-p، انجام می شوند. احتمال این که n پیروزی قبل از m شکست رخ دهد چقدر است؟ اگر A و B را به عنوان بازیکن هایی که بازی می کنند تصور کنیم بطوری که A یک امتیاز کسب می کند وقتی پیروزی رخ می دهد و B یک امتیاز وقتی شکست، در این صورت احتمال مطلوب، احتمالی است که A برنده شود اگر قرار باشد بازی تا موضعی که در آن A به n و B به m امتیاز دیگر نیاز دارد برنده شود ادامه پیدا کند.

حل: دو راه حل ارائه می دهیم که اولی از فرما و دومی از پاسکال است.

احتمالی را که n پیروزی قبل از m شکست رخ دهد با $P_{n,m}$ نشان می دهیم. با شرطی کردن برآمد آزمایش اول داریم (چرا؟ دلیل بیاورید)

$$P_{n,m} = pP_{n-1,m} + (1-p)P_{n,m-1} \qquad n \geq 1, m \geq 1$$

با استفاده از شرایط مرزی آشکار $P_{n,0} = 0$ ، $P_{0,m} = 1$ ، این معادلات را می توان نسبت به $P_{n,m}$ حل کرد. به جای پرداختن به جزئیات کسل کننده، راه حل پاسکال را در نظر می گیریم.

پاسکال چنین استدلال می کرد برای این که n پیروزی قبل از m شکست رخ دهد، لازم و کافی است که لااقل n پیروزی در m + n - 1 آزمایش اول وجود داشته باشد. (حتی اگر بازی قرار بود قبل از m + n - 1 آزمایش کامل شود، می توان تصور کرد که آزمایشهای اضافی لازم انجام می شود). این امر درست است زیرا اگر n پیروزی در m + n -1 آزمایش اول وجود داشته باشد، بایستی حداکثر m - 1 شکست در این m + n -1 آزمایش وجود داشته باشد، پس n پیروزی قبل از m شکست رخ خواهد داد. از سوی دیگر، اگر در n + m − 1 آزمایش اول، کمتر از n پیروزی وجود داشته باشد بایستی لااقل m شکست در همین تعداد آزمایش وجود داشته باشد، پس n پیروزی قبل از m شکست رخ نمی دهد.

بنابراین، چنان که احتمال دقیقاً k پیروزی در m + n - 1 آزمایش برابر است با $\binom{m+n-1}{k}p^k(1-p)^{m+n-1-k}$ (مثال ۴ ث را ببینید)، ملاحظه می کنیم احتمال مطلوب n پیروزی قبل از m شکست برابر است با

$$P_{n,m} = \sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} p^k (1-p)^{m+n-1-k}$$

راه حل دیگری از مسألهٔ امتیازها در مسأله نظری ۱۲ ارائه شده است. به عنوان توضیح مسأله امتیازها، فرض کنید که دو بازیکن هریک A ریال می پردازد و هریک از آنان شانس برابر برای بردن هر امتیاز دارد $\left(p = \frac{1}{2}\right)$. اگر n امتیاز برای بردن لازم باشد و بازیکن اول دارای ۱ امتیاز و دومی هیچ امتیازی نداشته باشد، در این صورت بازیکن اول سزاوار

$$2AP_{n-1,n} = 2A \sum_{k=n-1}^{2n-2} \binom{2n-2}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$$

می باشد.

اکنون

$$\sum_{k=n-1}^{2n-2}\binom{2n-2}{k} = \sum_{k=n-1}^{2n-2}\binom{2n-2}{2n-2-k}$$
$$= \sum_{i=n-1}^{0}\binom{2n-2}{i}$$

که در آن تساوی اخیر از جانشینی $i = 2n - 2 - k$ نتیجه می شود. بنابراین

$$2\sum_{k=n-1}^{2n-2}\binom{2n-2}{k} = \sum_{k=0}^{2n-2}\binom{2n-2}{k} + \binom{2n-2}{n-1}$$
$$= (1+1)^{2n-2} + \binom{2n-2}{n-1}$$

و به این ترتیب بازیکن اول سزاوار

$$A\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}\binom{2n-2}{n-1}\right]$$

می باشد.

مثال بعدی با مسأله مشهوری به نام مسألهٔ ورشکستگی قمارباز سروکار دارد.

مثال ۴ د: مسأله ورشکستگی قمارباز ـ دو قمار باز A و B بر روی برآمدهای پرتابهای ستوالی شرط بندی می کنند. در هر پرتاب، اگر سکه شیر بیاید، A یک واحد پولی از B دریافت می کند، در صورتی که خط بیاید A یک واحد به B می پردازد. این بازی را این دو نفر آن قدر ادامه می دهند تا پول یکی از آنها تمام شود. اگر فرض شده باشد که پرتابهای پی درپی سکه مستقلند و در هر پرتاب احتمال آمدن شیر p است، احتمال این که پول بازیکن A به پایان برسد در صورتی که وی با i واحد و B با N - i واحد شروع کرده باشد، چقدر است؟

حل: فرض کنید E پیشامدی را نشان دهد که پول A تمام می شود وقتی وی با i واحد و B با N - i واحد شروع کرده باشند، برای روشن کردن بستگی بـه پول اولیه A، قرار دهید $P(E) = P_i$. برای P(E) عبارتی با شرطی کردن بر برآمد پرتاب اول به صورت زیر به دست می آوریم: فرض کنید H پیشامدی را که پرتاب اول شیر بیاید نشان دهد، در این صورت

$$P_i = P(E) = P(E \mid H)P(H) + P(E \mid H^c)P(H^c)$$
$$= pP(E \mid H) + (1 - p)P(E \mid H^c)$$

اکنون با فرض این که پرتاب اول شیر آمده باشد، وضعیت بعد از اولین شرط این است که A دارای i + 1 واحد و B دارای N-(i + 1) واحد است. چون پرتابهای پی در پی، مستقل با

احتمال مشترك p برای شیر فرض شده اند، نتیجه می شود که از این نقطه به بعد، احتمال این که A تمام پول را ببرد دقیقاً برابر است با این که این بازی عیناً با A شروع شده است که دارای سرمایه اولیه $i + 1$ واحد و B دارای سرمایهٔ اولیهٔ $N-(i+1)$ واحد است بنابراین.

$$P(E|H) = P_{i+1}$$

و بطور مشابه

$$P(E|H^c) = P_{i-1}$$

بنابراین با قرار دادن $q = 1 - p$، حاصل می شود

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1} \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{۴-۲}$$

با استفاده از شرایط مرزی واضح $P_0 = 0$ و $P_N = 1$ ، اکنون معادلهٔ (۴-۲) را حل می کنیم.
چون $p + q = 1$ ، این معادلات با

$$pP_i + qP_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}$$

یا

$$P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1}) \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{۴-۳}$$

هم ارزند. چون $P_0 = 0$، از معادلهٔ (۴-۳) حاصل می شود:

$$\begin{aligned}
P_2 - P_1 &= \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p}P_1 \\
P_3 - P_2 &= \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1 \\
&\vdots \\
P_i - P_{i-1} &= \frac{q}{p}(P_{i-1} - P_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} P_1 \\
&\vdots \\
P_N - P_{N-1} &= \frac{q}{p}(P_{N-1} - P_{N-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} P_1
\end{aligned} \tag{۴-۴}$$

با جمع کردن $i-1$ معادله اول (۴-۴) نتیجه می شود

$$P_i - P_1 = P_1\left[\left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]$$

یا

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)} P_1 & \text{و } \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ iP_1 & \text{و } \dfrac{q}{p} = 1 \end{cases}$$

اکنون، با استفاده از این واقعیت که $P_N = 1$ ، داریم

$$P_1 = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)}{1-(q/p)^N} & \text{و } p \neq \frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{N} & \text{و } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

و بنابر این

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N} & \text{و } p \neq \frac{1}{2} \\ \dfrac{i}{N} & \text{و } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(۵-۴)

فرض کنید Q_i احتمالی را که پول B تمام می شود نشان دهد در حالی که A با i و B با $N-i$ شروع می کند. آن گاه با تقارن با وضعیتی که شرح دادیم ، با جانشین کردن p با q و i با $N-i$ مشاهده می کنیم که

$$Q_i = \begin{cases} \dfrac{1-(p/q)^{N-i}}{1-(p/q)^N} & \text{if } q \neq \frac{1}{2} \\ \dfrac{N-i}{N} & \text{if } q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

به علاوه ، چون $q = \frac{1}{2}$ هم‌ارز با $p = \frac{1}{2}$ است، وقتی $q \neq \frac{1}{2}$ ، داریم

$$
\begin{aligned}
P_i + Q_i &= \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N} + \frac{1-(p/q)^{N-i}}{1-(p/q)^N} \\
&= \frac{p^N - p^N(q/p)^i}{p^N - q^N} + \frac{q^N - q^N(p/q)^{N-i}}{q^N - p^N} \\
&= \frac{p^N - p^{N-i}q^i - q^N + q^i p^{N-i}}{p^N - q^N} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

چون این نتیجه با $p = q = \frac{1}{2}$ نیز برقرار است، مشاهده می کنیم

$$P_i + Q_i = 1$$

به عبارتی این معادله بیانگر آن است که پول A یا B با احتمال ۱ ، تمام می شود، به بیان دیگر ، احتمال این که بازی تا بی نهایت ادامه یابد در حالی که سرمایهٔ A همواره بین ۱ و N - 1 باشد صفر است. (خواننده باید دقت کند زیرا سه برآمد ممکن برای این بازی وجود دارد و نه دو برآمد. یا A می برد یا B و یا بازی تا ابد بدون برنده ادامه می یابد ، که در بالا نشان دادیم احتمال پیشامد اخیر صفر است).

به عنوان مثال ، اگر قرار باشد A با ۵ واحد و B با ۱۰ واحد شروع کند، احتمال برنده شدن A ، $\frac{۱}{۳}$ است اگر p برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، در صورتی که این احتمال به

$$\frac{1-(\frac{2}{3})^5}{1-(\frac{2}{3})^{15}} \approx .87$$

اگر p برابر ۰٫۶ باشد افزایش می یابد.

حالت خاصی از مسألهٔ ورشکستگی بازیکن که به مسأله **مدت زمان بازی** نیز مشهور است، توسط فرمای فرانسوی در ۱۶۵۷ به ریاضیدان آلمانی کریستیان هویگنس پیشنهاد شده بود. در روایتی که وی پیشنهاد کرد و توسط هویگنس حل شد، A و B هریک ۱۲ سکه داشتند. این دو بازیکن برسر این سکه ها در یک بازی با ۳ تاس به صورت زیر بازی کردند. هرگاه مجموع خالها ۱۱ می شد (تفاوتی ندارد که کدام یک تاسها را ریخته باشد)، A یک سکه به B می داد. هرگاه مجموع خالها ۱۴ می شد، B یک سکه به A می داد. فردی که اول تمام سکه ها را می برد، برندهٔ بازی بود. چون $\frac{۲۷}{۲۱۶}$ = {۱۱ خال} P و $\frac{۱۵}{۲۱۶}$ = {۱۴ خال} P ، از مثال ۴ د مشاهده می کنیم که برای A این مسأله عیناً همان مسأله ورشکستگی قمار باز است و (مثال ۴ د) با

$N = ۲۴$ ، $i = ۱۲$ ، $P = \frac{۱۵}{۲۲}$. حالت کلی مسألهٔ ورشکستگی قمار باز به وسیله برنولی حل شد و ۸ سال پس از درگذشت وی در سال ۱۷۱۳ انتشار یافت.

به منظور کاربردی از مسألهٔ ورشکستگی قمار باز به آزمون دارو، فرض کنید دو داروی جدید برای معالجهٔ بیماری معینی عرضه شده است. داروی i دارای نرخ بهبودی P_i ، $i = 1, 2$ است، با این مفهوم که هر بیماری که با داروی i معالجه شود با احتمال P_i بهبود می‌یابد. با وجود این نرخهای بهبودی معلوم نیستند، و به روشی علاقه‌مندیم که تصمیم بگیریم آیا $P_1 > P_2$ یا $P_2 > P_1$: برای تصمیم گیری در بارهٔ یکی از این دو پیشنهاد متناوب، آزمون زیر را در نظر بگیرید: زوجهایی از بیماران را پی در پی مداوا می‌کنیم به یکی از دو عضو داروی ۱ و به عضو دیگر داروی ۲ تجویز می‌شود. نتایج برای هر زوج تعیین شده و آزمون متوقف می‌شود، هرگاه مجموع معالجه‌ها از یک دارو از مجموع معالجه‌ها از داروی دیگر از عددی که از قبل تعیین شده است تجاوز کند. بطور دقیق، فرض کنید.

$$X_i \begin{cases} 1 & \text{اگر بیماری که در زوج } j \text{ ام است پس از مصرف داروی ۱ معالجه شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$Y_i \begin{cases} 1 & \text{اگر بیماری که در زوج } j \text{ ام پس از مصرف داروی ۲ معالجه شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای عدد از قبل تعیین شدهٔ M ، این آزمون پس از زوج N متوقف می‌شود که در آن N اولین مقدار n است، بطوری که یا

$$X_1 + \cdots + X_n - (Y_1 + \cdots + Y_n) = M$$

یا

$$X_1 + \cdots + X_n - (Y_1 + \cdots + Y_n) = -M$$

در حالت اول فرض $P_1 > P_2$ و در حالت دوم $P_2 > P_1$ را مورد تأکید قرار می‌دهیم.

به منظور این که معلوم شود آیا این آزمون خوبی است یا نه، چیزی که باید بدانیم احتمالی است که این آزمون منتهی به تصمیم نادرست می‌شود. یعنی، برای P_1 و P_2 مفروض، که در آن $P_1 > P_2$ احتمال این که این آزمون به غلط $P_1 > P_2$ را تأکید کند چقدر است؟ برای تعیین

این احتمال، توجه داشته باشید که بعد از این که هر زوج بررسی شد، تفاضل تراکمی معالجه شده هایی که از داروی (۱) استفاده کرده اند در مقابل کسانی که داروی (۲) را مورد استفاده قرار داده اند با احتمال $P_1\ (1 - P_2)$ یک واحد افزایش می یابد ـ چون این احتمال این است که داروی (۱) به معالجه منجر می شود و داروی (۲) نمی شود ـ یا با احتمال $(1 - P_1)\ P_2$ 1 واحد کاهش می یابد، یا با احتمال $P_1P_2 + (1 - P_1)(1 - P_2)$ تغییری نمی کند. بنابراین، اگر تنها آن زوجهایی را که در آنها تفاضل تراکمی تغییر می کند در نظر بگیریم، این تفاضل با احتمال

$$P = P\{\text{۱ واحد بالا} \mid \text{۱ واحد بالا یا ۱ واحد پائین}\}$$

$$= \frac{P_1(1-P_2)}{P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2}$$

۱ واحد افزایش می یابد و با احتمال

$$1 - P = \frac{P_2(1-P_1)}{P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2}$$

۱ واحد کاهش می یابد.

بنابراین احتمال این که این آزمون $P_2 > P_1$ را بپذیرد برابر با احتمالی است که این قمارباز هر (یک واحد) شرط را که با احتمال P می برد M واحد پایین خواهد آمد قبل از آن که M واحد بالا برود. اما معادلهٔ (۴-۵)، با $i = M$ ، $N = 2M$ نشان می دهد که این احتمال با رابطهٔ زیر داده شده است.

$$P(\text{آزمون } P_2 > P_1 \text{ را بپذیرد})$$

$$= 1 - \frac{1 - \left(\frac{1-P}{P}\right)^M}{1 - \left(\frac{1-P}{P}\right)^{2M}}$$

$$= 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{1-P}{P}\right)^M}$$

$$= \frac{1}{1+\gamma^M}$$

که در آن

$$\gamma = \frac{P}{1-P}$$
$$= \frac{P_1(1-P_2)}{P_2(1-P_1)}$$

بنابراین، برای مثال، اگر $P_1 = 0.6$ و $P_2 = 0.4$ ، احتمال تصمیم نادرست وقتی $M = 5$ باشد ۰٫۰۱۷ است و این احتمال وقتی $M = 10$ ، به ۰٫۰۰۰۳ کاهش می یابد.

۵- تابع $P(\cdot\,|\,F)$ یك احتمال است

احتمالهای شرطی درهمهٔ خواص احتمالهای معمولی صدق می کند، که در حکم ۵-۱ ثابت شده است و نشان می دهد که $P(E\,|\,F)$ در سه اصل موضوع احتمال صدق می کند.

حکم ۵-۱

(الف) $0 \le P(E|F) \le 1.$

(ب) $P(S|F) = 1.$

(پ) اگر E_i ، $i = 1,2,\ldots$ پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند، آن گاه

$$P\left(\bigcup_1^\infty E_i|F\right) = \sum_1^\infty P(E_i|F).$$

برهان : برای اثبات قسمت (الف)، باید نشان دهیم که $0 \le P(EF)\,/\,P(F) \le 1$. نامساوی سمت چپ آشکار است و سمت راست بسهولت نتیجه می شود، زیرا $EF \subset F$ که نتیجه می دهد $P(EF) \le P(F)$.

قسمت (ب) از رابطهٔ زیر نتیجه می شود، زیرا

$$P(S|F) = \frac{P(SF)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

قسمت (پ) نتیجه می شود زیرا

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i|F\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)F\right)}{P(F)}$$

$$= \frac{P\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_iF\right)}{P(F)} \qquad \left(\bigcup_{1}^{\infty} E_i\right)F = \bigcup_{1}^{\infty} E_iF$$ زیرا

$$= \frac{\sum_{1}^{\infty} P(E_iF)}{P(F)}$$

$$= \sum_{1}^{\infty} P(E_i|F)$$

که در آن تساوی ما قبل آخر نتیجه می شود زیرا $E_iE_j = \varnothing$ نتیجه می دهد که $E_iFE_jF = \varnothing$. اگر $Q(E) = P(E|F)$ تعریف شود از حکم ۵-۱ نتیجه می شود که $Q(E)$ را می توان به عنوان یک تابع احتمال بر پیشامدهای S در نظر گرفت. پس همه احکامی که قبلاً برای احتمالها ثابت شده است بر این تابع اعمال می شود، برای مثال داریم

$$Q(E_1 \cup E_2) = Q(E_1) + Q(E_2) - Q(E_1E_2)$$

یا هم ارز آن

$$P(E_1 \cup E_2|F) = P(E_1|F) + P(E_2|F) - P(E_1E_2|F)$$

همچنین، اگر احتمال شرطی $Q(E_1|E_2)$ را با $Q(E_1|E_2) = \dfrac{Q(E_1E_2)}{Q(E_2)}$ تعریف کنیم، از معادلهٔ (۳-۱) مشاهده می کنیم که

$$Q(E_1) = Q(E_1|E_2)Q(E_2) + Q(E_1|E_2^c)Q(E_2^c) \tag{۱-۵}$$

زیرا

$$Q(E_1|E_2) = \frac{Q(E_1E_2)}{Q(E_2)}$$

$$= \frac{P(E_1E_2|F)}{P(E_2|F)}$$

$$= \frac{\dfrac{P(E_1E_2F)}{P(F)}}{\dfrac{P(E_2F)}{P(F)}}$$

$$= P(E_1|E_2F)$$

دیده می شود که معادلهٔ (۵-۱) با

$$P(E_1|F) = P(E_1|E_2F)P(E_2|F) + P(E_1|E_2^cF)P(E_2^c|F)$$

هم ارز است.

مثال ۵ الف. مثال ۳ الف را که مربوط به یک شرکت بیمه است در نظر بگیرید. این شرکت براین باور است که افراد را می توان به دو طبقهٔ متمایز تقسیم کرد: دسته ای که مستعد تصادف اند و دسته ای که فاقدآنند. در طی سال مفروض دلخواهی یک فرد مستعد تصادف با احتمال ۰/۴ تصادف خواهد داشت، در حالی که رقم متناظر برای فرد نا مستعد تصادف برابر ۰/۲ است. احتمال شرطی که یک بیمه گذار جدید، تصادفی در سال دومی که دارای بیمه نامه است، داشته باشد چقدر است؟ در صورتی که بدانیم این بیمه گذار یک تصادف در سال اول داشته است.

حل: اگر A پیشامدی را که این بیمه گذار مستعد تصادف است و A_i ، $i = 1, 2$ ، پیشامدی را که وی تصادفی درسال i ام داشته است، نمایش دهند، احتمال مطلوب $P(A_2 | A_1)$ را می توان با شرطی کردن براین که بیمه گذار مستعد تصادف است یا خیر، به طریق زیر به دست آورد:

$$P(A_2|A_1) = P(A_2|AA_1)P(A|A_1) + P(A_2|A^cA_1)P(A^c|A_1)$$

اکنون

$$P(A|A_1) = \frac{P(A_1A)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1|A)P(A)}{P(A_1)}$$

با وجود این، فرض می شود که $P(A)$ برابر $\frac{۳}{۱۰}$ است، و در مثال ۳ الف نشان دادیم که $P(A_1) = 0.26$ بنابراین

$$P(A|A_1) = \frac{(.4)(.3)}{.26} = \frac{6}{13}$$

و در نتیجه

$$P(A^c|A_1) = 1 - P(A|A_1) = \frac{7}{13}$$

چون $P(A_2 | AA_1) = .4$ و $P(A_2 | A^cA_1) = .2$ می بینیم که

$$P(A_2|A_1) = (.4)\tfrac{6}{13} + (.2)\tfrac{7}{13} = .29$$

مثال بعدی با مسأله ای در نظریه گشتها سروکار دارد.

مثال ۵ ب. آزمایشهای مستقلی که با احتمال p به پیروزی و $1 - p$ به شکست منتهی می شوند انجام می شوند. به محاسبهٔ این احتمال که گشتی مرکب از n پیروزی متوالی قبل از گشتی مرکب از m شکست متوالی رخ دهد، علاقه مندیم.

حل: فرض کنید E پیشامدی را که گردشی از n پیروزی متوالی قبل از گشتی از m شکست متوالی رخ دهد، نمایش می دهد، برای به دست آوردن $P(E)$ ، با شرطی کردن بر برآمد آزمایش اول آغاز می کنیم. یعنی اگر H پیشامدی را که آزمایش اول به پیروزی منتهی شود نمایش دهد، حاصل می شود.

$$P(E) = pP(E|H) + qP(E|H^c) \tag{۵-۲}$$

اکنون، با فرض این که آزمایش اول پیروزی بوده است، یک راه که می توان گشتی از n پیروزی قبل از گردشی از m شکست به دست آورد این است که $n - 1$ آزمایش بعدی کلاً به پیروزی منتهی شود. بدین ترتیب، بیایید بر این که این امر رخ می دهد یا نه شرطی کنیم. یعنی اگر F پیشامدی باشد که آزمایش ۲ تا n همه پیروزی اند، داریم

$$P(E|H) = P(E|FH)P(F|H) + P(E|F^cH)P(F^c|H) \tag{۵-۳}$$

آشکارا، $P(E|FH) = 1$، از سوی دیگر، اگر پیشامد F^cH رخ دهد، آزمایش اول باید به پیروزی منتهی شود، ولی شکستی در زمان معینی در طی $n - 1$ آزمایش بعدی خواهد بود. با وجود این، وقتی این شکست رخ می دهد، تمام پیروزیهای قبلی را از بین می برد، و وضعیت دقیقاً مثل این است که با یک شکست آغاز کرده باشیم. بنابراین

$$P(E|F^cH) = P(E|H^c)$$

چون استقلال آزمایشها، مستقل بودن E و F را نتیجه می دهند و همچنین $P(F) = p^{n-1}$ ، از (۵-۳)داریم

$$P(E|H) = p^{n-1} + (1 - p^{n-1})P(E|H^c) \tag{۵-۴}$$

اکنون به طریقی مشابه عبارتی برای $P(E|H^c)$ به دست می‌آوریم. یعنی، G را پیشامدی که آزمایشهای ۲ تا m همه شکست‌اند فرض می‌کنیم. پس

$$P(E|H^c) = P(E|GH^c)P(G|H^c) + P(E|G^cH^c)P(G^c|H^c) \qquad (۵-۵)$$

اکنون، GH^c، پیشامدی است که تمام m آزمایش اول به شکست منتهی شوند، پس $P(E|GH^c) = 0$ همچنین، اگر G^cH^c رخ دهد، اولین آزمایش شکست است، ولی لااقل یک پیروزی در $m-1$ آزمایش بعدی وجود دارد. بنابراین، چون این پیروزی همه شکستهای قبلی را از بین می‌برد، ملاحظه می‌کنیم که

$$P(E|G^cH^c) = P(E|H)$$

بنابراین، چون $P(G^c|H^c) = P(G^c) = 1 - q^{m-1}$، از (۵-۵) داریم

$$P(E|H^c) = (1-q^{m-1})P(E|H) \qquad (۶-۵)$$

از حل معادلات (۵-۴) و (۵-۶) داریم

$$P(E|H) = \frac{p^{n-1}}{p^{n-1}+q^{m-1}-p^{n-1}q^{m-1}}$$

و

$$P(E|H^c) = \frac{(1-q^{m-1})p^{n-1}}{p^{n-1}+q^{m-1}-p^{n-1}q^{m-1}}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} P(E) &= pP(E|H) + qP(E|H^c) \\ &= \frac{p^n + qp^{n-1}(1-q^{m-1})}{p^{n-1}+q^{m-1}-p^{n-1}q^{m-1}} \\ &= \frac{p^{n-1}(1-q^m)}{p^{n-1}+q^{m-1}-p^{n-1}q^{m-1}} \end{aligned} \qquad (۷-۵)$$

جالب است توجه داشته باشیم که، بنابر تقارن مسأله، احتمال به دست آوردن گشتی از m شکست قبل از گشتی از n پیروزی، با همان معادلهٔ (۵-۷) داده می‌شود که در آن p را با q و n را با m تعویض کرده‌ایم. بنابراین احتمال برابر است با

$$= \frac{q^{m-1}(1-p^n)}{q^{m-1}+p^{n-1}-q^{m-1}p^{n-1}} \tag{۵-۸}$$

چون مجموع معادلات (۵-۷) و (۵ - ۸) برابر ۱ است، از آن نتیجه می شود که با احتمال ۱ گشتی از n پیروزی یا گشتی از m شکست مآلاً رخ خواهد داد.

به عنوان مثالی از معادلهٔ (۵-۷)، مشاهده می کنیم که در پرتاب سکه ای منظم احتمال این که گشتی از ۲ شیر قبل از گشتی از ۳ خط حاصل شود برابر $\frac{7}{10}$ است و برای ۲ شیر متوالی قبل از ۴ خط متوالی این احتمال به $\frac{5}{6}$ افزایش می یابد. در مثال بعدی به مسألهٔ جوربودن مونتمورت (مثال ۵ خ، فصل ۲) باز می گردیم، و این بار با استفاده از احتمالهای شرطی راه حلی ارائه می دهیم.

مثال ۵ پ. در یک میهمانی کلاههای n مرد بطور کامل مخلوط می شود و هر مرد بتصادف کلاهی را انتخاب می کند. اگر مردی کلاه خودش را صاحب شده باشد، گوییم که یک جوربودن رخ داده است.

۱ - احتمال این که هیچ جور بودنی وجود نداشته باشد، چقدر است؟

۲ - احتمال دقیقاً k جور بودن چقدر است؟

حل: فرض کنید E پیشامدی را نشان می دهد که، هیچ جور بودنی رخ ندهد، و برای نشان دادن بستگی به n، می نویسیم $P_n = P(E)$. با شرطی کردن براین که اولین مرد کلاه خودش را انتخاب می کند یا خیر، آغاز می کنیم ـ این پیشامدها را M و M^c می نامیم. در این صورت

$$P_n = P(E) = P(E|M)P(M) + P(E|M^c)P(M^c)$$

واضح است که $P(E|M) = 0$، و بدین ترتیب

$$P_n = P(E|M^c)\frac{n-1}{n} \tag{۵-۹}$$

اکنون، $P(E|M^c)$ برابر این احتمال است که هیچ جور بودنی وجود نداشته باشد وقتی $n-1$ مرد از مجموعهٔ $n-1$ کلاه که شامل کلاه یکی از مردها نیست، انتخاب می کنند. این امر ممکن است به صورت هریک از دو راه دو به دو ناسازگار رخ دهد. یا هیچ جور بودنی وجود ندارد و مرد اضافی کلاه اضافی را انتخاب نمی کند (این کلاه مردی است که ابتدا

انتخاب می کند) یا هیچ جور بودنی وجود ندارد و مرد اضافی کلاه اضافی را انتخاب می کند. احتمال پیشامد اول از این پیشامدها درست برابر P_{n-1} است که می توان آن را با در نظر گرفتن کلاه اضافی به عنوان «متعلق بودن به مرد اضافی» فهمید. چون پیشامد دوم دارای احتمال $[1/(n-1)]P_{n-2}$ است، داریم

$$P(E|M^c) = P_{n-1} + \frac{1}{n-1}P_{n-2}$$

و بنابراین، از معادلهٔ (۵ - ۹)

$$P_n = \frac{n-1}{n}P_{n-1} + \frac{1}{n}P_{n-2}$$

یا هم ارز آن

$$P_n - P_{n-1} = -\frac{1}{n}(P_{n-1} - P_{n-2}) \qquad (۵-۱۰)$$

با وجود این، چون P_n برابر احتمالی است که هیچ جور بودنی، وقتی n مرد از بین کلاههای خودشان انتخاب می کنند، وجود نداشته باشد، داریم

$$P_1 = 0 \qquad P_2 = \tfrac{1}{2}$$

و بدین ترتیب، از معادلهٔ (۵-۱۰)

$$P_3 - P_2 = -\frac{(P_2 - P_1)}{3} = -\frac{1}{3!} \qquad \text{یا} \qquad P_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$

$$P_4 - P_3 = -\frac{(P_3 - P_2)}{4} = \frac{1}{4!} \qquad \text{یا} \qquad P_4 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

و بطور کلی، ملاحظه می کنیم که

$$P_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

به منظور به دست آوردن دقیقاً k جورشدگی، گروه ثابتی از k مرد را درنظر می گیریم. احتمال این که این گروه و تنها این گروه، کلاههای خودشان را انتخاب کنند برابر است با

$$\frac{1}{n}\,\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{n-(k-1)}P_{n-k} = \frac{(n-k)!}{n!}P_{n-k}$$

که در آن P_{n-k} برابر احتمال شرطی است که $n-k$ مرد دیگر در انتخاب از بین کلاههای خودشان، هیچ جورشدنی نداشته باشند چون $\binom{n}{k}$ انتخاب مجموعه ای از k مرد داریم، احتمال مطلوب دقیقاً k جورشدگی برابر است با

$$\frac{P_{n-k}}{k!}=\frac{\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}}{k!}$$

یک مفهوم مهم در نظریه احتمال، استقلال شرطی پیشامدهاست. می گوییم که پیشامدهای E_1 و E_2 با فرض F **مستقل مشروطند**، اگر، در صورت رخ دادن F، احتمال شرطی رخ دادن E_1، به وسیله اطلاعات مربوط به این که E_2 رخ داده است یا خیر، تغییر نکند. بطور رسمی تر، E_1 و E_2، با فرض رویدادن F مستقل مشروط، نامیده می شوند اگر

$$P(E_1|E_2F)=P(E_1|F) \qquad (۱۱-۵)$$

یا هم ارز آن

$$P(E_1E_2|F)=P(E_1|F)P(E_2|F) \qquad (۱۲-۵)$$

مفهوم استقلال شرطی را بسهولت می توان به بیش از دو پیشامد گسترش داد که به عنوان تمرین واگذار می شود.

خواننده توجه دارد که مفهوم استقلال شرطی بطور ضمنی در مثال ۵ الف به کار رفته است، که در آنجا بطور ضمنی فرض شده بود که پیشامدهایی که یک بیمه گذار در سال i ام تصادفی داشته باشد $i=1,2,\ldots$ به طور شرطی مستقل بود، با فرض این که این فرد مستعد تصادف باشد یا خیر. [این امر برای محاسبه $P(A_2|A_1A)$ و $P(A_2|A^cA_1)$ به ترتیب برابر ۰/۴ و ۰/۲ به کار رفت] مثال زیر، که گاهی دستور توالی لاپلاس نامیده می شود، مفهوم استقلال شرطی را بیشتر روشن می کند.

مثال ۵ ت. دستور توالی لاپلاس. $k+1$ سکه در جعبه ای موجود است. سکه i ام، وقتی پرتاب شود، با احتمال i/k شیر می آید $i=0,1,\ldots,k$. سکه ای بتصادف از جعبه بیرون کشیده و سپس آن را مکرراً پرتاب می کنیم. اگر n پرتاب اول همه شیر بیایند، احتمال شرطی این که پرتاب $(n+1)$ ام نیز شیر بیاید چقدر است؟

حل : فرض کنید E_i پیشامدی را که در ابتدا سکه i ام بیرون کشیده شده است نمایش می‌دهد $i = 0, 1, \ldots, k$ ، F_n پیشامدی را که همهٔ n پرتاب اول شیر آمده است و F پیشامد پرتاب $(n + 1)$ ام شیر است باشد. اکنون احتمال مطلوب $P(F|F_n)$ به صورت زیر به دست می‌آید :

$$P(F|F_n) = \sum_{i=0}^{k} P(F|F_nE_i)P(E_i|F_n)$$

اکنون، با فرض این که سکه i ام بیرون کشیده شده باشد، منطقی است فرض کنیم این برآمدها بطور شرطی مستقلند و هرکدام با احتمال i/k شیر می‌آید. بنابر این

$$P(F|F_nE_i) = P(F|E_i) = \frac{i}{k}$$

همچنین

$$\begin{aligned} P(E_i|F_n) &= \frac{P(E_iF_n)}{P(F_n)} \\ &= \frac{P(F_n|E_i)P(E_i)}{\sum_{j=0}^{k} P(F_n|E_j)P(E_j)} \\ &= \frac{(i/k)^n[1/(k+1)]}{\sum_{j=0}^{k} (j/k)^n[1/(k+1)]} \end{aligned}$$

بنابر این

$$P(F|F_n) = \frac{\sum_{i=0}^{k} (i/k)^{n+1}}{\sum_{j=0}^{k} (j/k)^n}$$

اما اگر k بزرگ باشد، می توان تقریبهای انتگرال زیر را به کار برد

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{i}{k}\right)^{n+1} &\approx \int_0^1 x^{n+1}\,dx = \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{j}{k}\right)^{n} &\approx \int_0^1 x^{n}\,dx = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

و بدین ترتیب برای k بزرگ

$$P(F|F_n) \approx \frac{n+1}{n+2}$$

تمرینات نظری

۱- بپذیرید که قانون اعداد بزرگ برنولی درست است، این قانون بیانگر آن است که اگر آزمایشی تحت شرایط دقیقاً یکسانی مدام تکرار شود، نسبت دفعاتی که پیشامد E رخ می‌دهد، با احتمال ۱، برابر P(E) است. اکنون آن تکرارهایی از این آزمایش را که برآمد نقطه‌ای در F است را در نظر بگیرید. نشان دهید که نسبت این تکرارها که در آنها این برآمد در E نیز هست، با احتمال ۱، برابر با P(E|F) است.

۲- ثابت کنید اگر $P(E_i \mid E_1 \ldots E_{i-1}) > 0$، $i = 1, \ldots, n$، آن‌گاه

$$P(E_1E_2\cdots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)\cdots P(E_n|E_1E_2\cdots E_{n-1})$$

۳- گلوله‌ای در یکی از n جعبه است و با احتمال P_i، این گلوله در جعبه i ام است. اگر گلوله در جعبه i باشد، جستجوی این جعبه با احتمال α_i آن را ظاهر می‌کند. نشان دهید احتمال شرطی این که گلوله در جعبه j باشد، در صورتی که جستجوی جعبهٔ i آن را ظاهر نمی‌کند، برابر است با

$$\frac{P_j}{1-\alpha_i P_i} \quad j \neq i \text{ و}$$

$$\frac{(1-\alpha_i)P_i}{1-\alpha_i P_i} \quad j = i \text{ و}$$

۴- گزاره‌های زیر را ثابت کنید یا مثالهای نقض ارائه دهید:

(الف) اگر E مستقل از F و E مستقل از G باشد، آن‌گاه E مستقل از $F \cup G$ است.

(ب) اگر E مستقل از F و E مستقل از G باشد و $FG = \varnothing$، آن‌گاه E مستقل از $F \cup G$ است.

(پ) اگر E مستقل از F و F مستقل از G باشد و E مستقل از FG باشد، آن‌گاه G مستقل از EF است.

۵- گوییم پیشامد F حامل اطلاعات منفی در بارهٔ پیشامد E است و می‌نویسیم $F \searrow E$ اگر

$$P(E|F) \leq P(E)$$

گزاره‌های شرطی را ثابت کنید یا مثالهای نقض ارائه دهید:

(الف) اگر $E \searrow F$ ، $F \searrow E$ آن گاه .

(ب) اگر $E \searrow F$ و $G \searrow E$ ، $F \searrow G$ آن گاه .

(پ) اگر $E \searrow F$ و $E \searrow G$ ، $FG \searrow E$ آن گاه .

(الف)، (ب) و (پ) را هرگاه $\searrow$ با $\nearrow$ جانشینی شود تکرار کنید، $\nearrow$ بیانگر آن است که F حامل اطلاعات مثبت در مورد E است و می نویسیم $F \nearrow E$ ، هرگاه
$P(E|F) \geq P(E)$

۶- فرض کنید $\{E_n, n \geq 1\}$ و $\{F_n, n \geq 1\}$ دنباله هایی صعودی از پیشامدها هستند که دارای حد E و F می باشند . نشان دهید که اگر برای هر n ، E_n مستقل از F_n باشد، آن گاه E مستقل از F است.

۷- ثابت کنید اگر E_1 ، E_2 ، ... ، E_m پیشامدهای مستقل باشد، آن گاه

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = 1 - [1 - P(E_1)][1 - P(E_2)] \cdots [1 - P(E_n)]$$

۸- (الف) کیسه ای محتوی n گلولهٔ سفید و m گلوله سیاه است. هر بار یک گلوله بیرون می آوریم تا این که تنها گلوله های همرنگ باقی بمانند. نشان دهیدکه با احتمال $n/(n+m)$ همهٔ آنها سفید است.

راهنمایی : تصور کنید این آزمایش تا وقتی همه گلوله ها بیرون آورده شوند ادامه می یابد و آخرین گلوله بیرون آورده شده را در نظر بگیرید.

(ب) در استخری سه نوع ماهی قرمز، آبی و سبز و به ترتیب r ، b و g عدد وجود دارد. فرض کنید یک ماهی را بتصادف از استخر بیرون می آوریم (یعنی هر گزینش با احتمال یکسان یکی از ماهیهای باقی مانده می باشد). احتمال این که ماهیهای قرمز اولین نوع باشند که تمام می شود چقدر است.

راهنمایی : بنویسید $P\{R\} = P\{RGB\}1 - P\{RGP\}$ و احتمالهای سمت راست را ابتدا با شرطی کردن بر آخرین گونه ای که باید بیرون کشیده شود شرطی کنید.

۹- اگر $0 \leq a_i \leq 1$ ، $i = 1, 2, \ldots$ ، نشان دهید.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - a_j) \right] + \prod_{i=1}^{\infty} (1 - a_i) = 1$$

راهنمایی : فرض کنید تعدادی بی شمار سکه را پرتاب کرده ایم . a_i را برابر این احتمال که سکهٔ i ام شیر بیاید فرض کنید .

۱۰- احتمال شیرآمدن در یک پرتاب سکه‌ای برابر p است . نفر A را در نظر بگیرید که شروع به پرتاب این سکه کرده و آن قدر ادامه می دهد تا خط بیاید و از این لحظه به بعد نفر B شروع به پرتاب کرده و آن قدر ادامه می دهد تا خط ظاهر شود، سپس A این عمل را ادامه می‌دهد و به همین ترتیب الی آخر، فرض کنید $P_{n,m}$ احتمالی را که A دارای n شیر باشد قبل از آن که B ، m شیر جمع آوری کرده باشد، نشان دهد . نشان دهید .

$$P_{n,m} = pP_{n-1,m} + (1-p)(1-P_{m,n})$$

۱۱- فرض کنید که شخصی با حریفی که دارای ثروت سرشاری است قمار بازی می کند و در هر مرحله این شخص با احتمالهای p و 1-p به ترتیب یک واحد می برد یا می بازد. نشان دهید احتمال این که شخص در آخر کار ورشکست شود عبارت است از

$$\begin{array}{ll} 1 & \text{و } p \le \frac{1}{2} \\ (q/p)^i & \text{و } p > \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad q = 1-p \end{array}$$

که در آن i سرمایهٔ اولیهٔ این شخص است .

۱۲- آزمایشهای مستقل که با احتمال p منتهی به پیروزی می شوند متوالیاً انجام می شوند تا کلاً r پیروزی حاصل شود. نشان دهید احتمال این که دقیقاً n آزمایش لازم باشد برابر است با

$$\binom{n-1}{r-1} p^r(1-p)^{n-r}$$

با استفاده از این نتیجه، مسألهٔ امتیازها را حل کنید (مثال ۴ د) .

۱۳- آزمایشهای مستقل که با احتمال p به پیروزی و احتمال 1-p به شکست منتهی می شوند، آزمایشهای برنولی نامیده می شوند . فرض کنید P_n این احتمال را که n آزمایش برنولی به تعداد زوجی از موفقیتها منتهی شود نمایش می دهد (0 را عدد زوج در نظر می گیریم) . نشان دهید

$$P_n = p(1-P_{n-1}) + (1-p)P_{n-1} \qquad n \ge 1$$

و با استفاده از این مطلب (با استقرا) ثابت کنید که

$$P_n = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}$$

۱۴- فرض کنید Q_n این احتمال را که در n پرتاب یک سکه متعادل هیچ گردشی از سه شیر متوالی ظاهر نشود نمایش می دهد. نشان دهید

$$Q_n = \tfrac{1}{2}Q_{n-1} + \tfrac{1}{4}Q_{n-2} + \tfrac{1}{8}Q_{n-3}$$
$$Q_0 = Q_1 = Q_2 = 1$$

Q_8 را پیدا کنید.

۱۵- اگر A دارای n + 1 و B دارای n سکه متعادل بوده و آنها را پرتاب کنند، نشان دهید احتمال این که A شیرهای بیشتری از B به دست آورد برابر $\frac{1}{2}$ است.

راهنمایی : براین که کدام بازیکن بعد از آن که n سکه را پرتاب می کند شیرهای بیشتری دارد شرطی کنید (سه حالت ممکن است).

۱۶- مسألهٔ ورشکستگی قمارباز را با این استثنا که A و B موافقت می کنند بیش از n دست بازی نکنند در نظر بگیرید. فرض کنید $P_{n,i}$ احتمالی را که کل پول A تمام می شود نمایش دهد، در صورتی که A با i و B با N − i واحد شروع می کنند برای $P_{n,i}$ معادله ای برحسب $P_{n-1,i+1}$ و $P_{n-1,i-1}$ به دست آورده و $P_{7,3}$ را محاسبه کنید $N = 5$.

۱۷ - دو کیسه که هریک محتوی گلوله های سفید و سیاه است در نظر بگیرید، احتمالهای بیرون آوردن گلوله های سفید از کیسهٔ اول و دوم به ترتیب برابر است با p و p′ . گلوله هایی پی در پی با جایگذاری به شرح زیر انتخاب می کنیم:

در ابتدا گلوله ای با احتمال α از کیسه اول و با احتمال $1 - \alpha$ از کیسه دوم بیرون آورده می شود. سپس انتخابهای بعدی طبق این دستور انجام می شود که هر گاه گلوله سفیدی بیرون آورده شود (و جایگذاری شود)، گلوله بعدی از همان کیسه بیرون آورده می شود، ولی اگر گلولهٔ سیاه استخراج شود، گلوله، بعدی از کیسه دیگر برداشته می شود. فرض کنید α_n احتمالی را که گلوله n ام از کیسه اول انتخاب شده است نشان دهد. نشان دهید که

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n(p + p' - 1) + 1 - p' \qquad n \geq 1$$

و با استفاده از این مطلب ثابت کنید که

$$\alpha_n = \frac{1-p'}{2-p-p'} + \left(\alpha - \frac{1-p'}{2-p-p'}\right)(p+p'-1)^{n-1}$$

فرض کنید P_n این احتمال را که گلوله n ام انتخاب شده سفید باشد، نشان می دهد. P_n را پیدا کنید. همچنین $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ و $\lim_{n\to\infty} P_n$ را محاسبه کنید.

۱۸- مسألهٔ برگهٔ رأی ـ در انتخاباتی کاندیدای A، n رأی می آورد که در آن $n > m$ با فرض این که کلیه $(n+m)!/n!\,m!$ ترتیب این رأیها، هم احتمال باشند، فرض کنید $P_{n,m}$ ، این احتمال را که A در شمارش آرا همواره جلو باشد نشان دهد.

(الف)، $P_{2,1}$ ، $P_{3,1}$ ، $P_{3,2}$ ، $P_{4,1}$ ، $P_{4,2}$ ، $P_{4,3}$ را محاسبه کنید.

(ب) بر اساس نتایج (الف)، مقدار $P_{n,m}$ را حدس بزنید.

(پ) فرمول بازگشتی برای $P_{n,m}$ بر حسب $P_{n-1,m}$ و $P_{n,m}$ با شرطی کردن بر چه کسی رأی . . . می آورد (جای خالی را پر کنید) به دست آورید.

(ت) درستی حدس خود را در (ب) با استفاده از (پ) با برهان استقرایی بر $m + n$ تحقیق کنید.

۱۹- به عنوان الگوی ساده شده ای برای پیش بینی وضع هوا، فرض کنید فردا وضع هوا (آفتابی یا بارانی) با احتمال P با وضع آن در امروز یکسان خواهد بود. اگر وضع هوا اول ژانویه آفتابی باشد، نشان دهید P_n ، احتمال این که n روز بعد هوا آفتابی خواهد بود در

$$P_n = (2p-1)P_{n-1} + (1-p) \qquad n \ge 1$$
$$P_0 = 1$$

صدق می کند ثابت کنید

$$P_n = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(2p-1)^n \qquad n \ge 0$$

۲۰- کیسه ای محتوی a گلولهٔ سفید و b گلولهٔ سیاه است. چند گلوله از این کیسه طبق روش زیر بیرون می آوریم:

(الف) گلوله ای بتصادف انتخاب کرده و کنار می گذاریم

(ب) سپس گلولهٔ دومی انتخاب می شود؛ اگر با گلوله قبلی همرنگ نباشد، به کیسه برگردانده می شود و فرآیند از آغاز تکرار می شود اگر با گلولهٔ قبلی همرنگ باشد، آن را کنار می گذاریم و از (ب) شروع می کنیم.

به بیـان دیگر، گلوله ها نمونه گیـری می شوند و کنار گـذاشتـه می شوند تا این کـه تغییر رنگ رخ دهد کـه در این مـرحله آخریـن گلوله به کیـسه بر گـردانده شـده و فرآیند دوباره شـروع می شـود. فرض کنید $P_{a,b}$ احتمالی را که آخرین گلوله در کیسهٔ سفید باشد نمایش می دهد. ثابت کنید که

$$P_{a,b} = \frac{1}{2}$$

راهنمایی : از استقراء بر $k = a + b$ استفاده کنید.

۲۱- مستقیماً ثابت کنید که

$$P(E|F) = P(E|FG)P(G|F) + P(E|FG^c)P(G^c|F)$$

۲۲- هم ارزی معادلات (۵ - ۱۱) و (۵-۱۲) را ثابت کنید.

۲۳- تعریف استقلال شرطی را به بیش از ۲ پیشامد تعمیم دهید.

۲۴- ثابت کنید یا مثالی نقض ارائه دهید که اگر E_1 و E_2 مستقل باشند، آن گاه با معلوم بودن F، مستقل مشروطند.

۲۵- در دستور توالی لاپلاس(مثال ۵ ت) نشان دهیدکه اگر n پرتاب اول همه شیر بیایند، احتمال شرطی که m پرتاب بعدی نیزهمه شیرباشندبرابراست با $(n + 1) / (n + m + 1)$.

۲۶- در دسـتور تـوالی لاپلاس، فرض کـنید کـه n پرتاب اول به r شیـر و n - r خط منتهی شده باشد. نشان دهید احـتمال این که پرتاب$(n + 1)$ ام شیر بیاید برابر است با $\frac{r + 1}{n + 2}$. برای اثبات آن باید اتحاد زیر را ثابت کرد و به کار برد

$$\int_0^1 y^n(1 - y)^m dy = \frac{n!\, m!}{(n + m + 1)!}$$

راهنمـایی : برای اثبـات اتحـاد بـالا، فـرض کنیـد $C(n, m) = \int_0^1 y^n (1 - y)^m dy$. با انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$C(n, m) = \frac{m}{n + 1} C(n + 1, m - 1)$$

با شروع از $C(n, 0) = 1/n+1$ ، این اتحاد را با استقرا بر m ثابت کنید.

۲۷- فرض کنید یکی از دوستان شما با گرایشی غیر ریاضی ولی گرایشی فلسفی ادعا می کند که دستـور توالی لاپلاس باید نادرست باشد بـه این دلیل که می تواند به نتـایج مضحکی منتهی شود. برای مثال، وی اظهار می کند (اگر پسری ۱۰ سـاله باشد، طبق این دستور و با توجه

به این که این پسر ۱۰ سال عمر کرده است، احتمال این که یک سال دیگر زنده بماند $\frac{۱۱}{۱۲}$ است. از سوی دیگر، اگر این پسر، پدر بزرگی ۸۰ ساله داشته باشد احتمال این که پدر بزرگ یک سال دیگر زنده باشد برابر $\frac{۸۱}{۸۲}$ است. لذا این امر مسخره است. واضح است که شانس زنده ماندن وی یک سال دیگر بیشتر از پدر بزرگش می باشد، چه پاسخی برای دوست خود دارید؟

مسائل

۱- دو تاس منظم را می ریزیم احتمال مشروط این که لااقل یکی از آنها با ۶ خال ظاهر شود چقدر است؟ در صورتی که می دانیم این تاسها با خالهای متفاوت ظاهر می شوند.

۲- اگر دو تاس منظم را بریزیم احتمال مشروط این که در تاس اول ۶ ظاهر شود چقدر است؟ در صورتی که می دانیم مجموع خالهای دو تاس برابر i است برای تمام مقادیر i بین ۲ و ۱۲ محاسبه کنید.

۳- در یک دست بازی بریج، با استفاده از معادلهٔ (۲-۱)، احتمال مشروط این که شرق دارای ۳ خال پیک باشد را محاسبه کنید در صورتی که می دانیم شمال ـ جنوب کلاً دارای ۸ خال پیک می باشند.

۴- احتمال این که لااقل یک تاس از یک جفت تاس منظم ۶ بیاید چقدر است، در صورتی که می دانیم مجموع خالها برابر i ، $(i = 2, 3, \ldots, 12)$ است؟

۵- کیسه ای محتوی ۶ گلوله سفید و ۹ گلولهٔ سیاه است. اگر بخواهیم ۴ گلوله بتصادف و بدون جایگذاری بیرون آوریم، احتمال این که، دو گلولهٔ اول منتخب سفید و دو گلوله بعدی سیاه باشند چقدر است؟

۶- کیسه ای را در نظر بگیرید که محتوی ۱۲ گلوله است که ۸ تای آنها سفید است. نمونه ای به حجم ۴ با جایگذاری (و بدون جایگذاری) بیرون می آوریم ـ احتمال مشروط این که (در هر حالت) گلوله اول و سوم بیرون آمده سفید باشد چقدر است؟ در صورتی که می دانیم نمونهٔ منتخب دقیقاً دارای ۳ گلوله سفید است.

۷- شاهی از یک خانواده‌ای با دو فرزند است. احتمال این که فرزند دیگر خانواده دختر باشد چقدر است؟

۸- زوجی دو فرزند دارند. احتمال این که هردو دختر باشند، در صورتی که فرزند ارشد دختر باشد، چقدر است؟

۹- سه کیسه را در نظر بگیرید، کیسهٔ A دارای ۲ گلولهٔ سفید و ۴ گلولهٔ قرمز، B دارای ۸ گلوله سفید و ۴ قرمز، و C دارای ۱ گلوله سفید و ۳ قرمز است. اگر از هر کیسه ۱ گلوله بیرون آورده شود، احتمال این که، گلوله منتخب از کیسهٔ A سفید باشد در صورتی که می دانیم دقیقاً ۲ گلولهٔ سفید انتخاب شده است، چقدر است؟

۱۰- در بازی بریج، غرب دارای هیچ آسی نیست. احتمال این که حریف وی دارای: (الف) هیچ آسی نباشد، (ب) دارای ۲ آس یا بیشتر باشد، چقدر است؟ این احتمالها چه مقداری خواهند داشت اگر غرب دقیقاً دارای یک آس باشد.

۱۱- سه کارت بازی بتصادف، بدون جایگذاری، از یک دست ورق بازی معمولی مرکب از ۵۲ کارت بیرون کشیده شده است. این احتمال مشروط را که کارت منتخب اولی پیک باشد، در صورتی که می دانیم کارت دوم و سوم پیک هستند، محاسبه کنید.

۱۲- کیسه ای در ابتدا محتوی ۵ گلولهٔ سفید و ۷ گلولهٔ سیاه است. هربار یک گلوله انتخاب می شود و پس از مشاهدهٔ رنگ آن همراه با دو گلوله دیگر همرنگ خودش به کیسه باز گردانده می شود.

(الف) احتمالی را که دو گلولهٔ اول منتخب سیاه و دو گلوله بعدی سفید باشد محاسبه کنید.

(ب) احتمالی را که از ۴ گلوله اول منتخب، دقیقاً ۲ گلوله سیاه باشد، بیابید.

۱۳- کیسه I محتوی ۲ گلولهٔ سفید و ۴ قرمز است، در حالی که کیسه II محتوی ۱ گلوله سفید و ۱ گلوله قرمز است. گلوله ای بتصادف از کیسه I بیرون آورده و در II قرار می دهیم و سپس گلوله ای به تصادف از کیسه II بیرون می آوریم.

(الف) احتمال این که گلولهٔ منتخب از کیسه II سفید باشد چقدر است؟

(ب) احتمال مشروط این که گلوله جا به جا شده سفید باشد، در صورتی که می دانیم گلوله سفیدی از کیسه II بیرون آورده شده است، چقدر است؟

۱۴- چگونه ۲۰ گلوله، ۱۰ تا سفید و ۱۰ تا سیاه، را می توان در دو کیسه قرار داد بطوری که اگر یک کیسه بتصادف انتخاب شده و یک گلوله از آن بتصادف بیرون آورده شود، احتمال بیرون آوردن یک گلوله سفید بیشینه شود؟

۱۵- هریک از ۲ گلوله را سیاه یا طلایی رنگ کرده و در یک کیسه قرار می دهیم. فرض کنید هر گلوله با احتمال $\frac{1}{2}$ سیاه رنگ می شود و این پیشامدها مستقل است:

(الف) فرض کنید اطلاعاتی کسب می کنید که رنگ طلایی مصرف شده است (و بنابراین لااقل یکی از گلوله ها طلایی رنگ شده است). این احتمال مشروط را که هردو گلوله طلایی رنگ شده باشند محاسبه کنید.

(ب) اکنون فرض کنید که کیسه واژگون شده و ۱ گلوله از آن به بیرون پرت می شود که به رنگ طلایی است. احتمال این که هردو گلوله در این حالت طلایی باشند چقدر است؟ (توضیح دهید).

۱۶- به منظور برآورد تعداد افرادی که بیش از ۵۰ سال داشته و در شهری با جمعیت مشخص ۱۰۰۰۰۰ ساکن هستند روش زیر پیشنهاد شده است. «در حالی که در خیابان قدم می زنید، حساب درصد افرادی را که با آنها برخورد می کنید و بیش از ۵۰ سال دارند نگه دارید. این کار را چند روز ادامه داده و سپس درصد حاصل را در ۱۰۰۰۰۰ ضرب کنید تا برآورد به دست آید» این روش را تعبیر کنید.

راهنمایی: فرض کنید p نسبت افراد بالای ۵۰ سال را در این شهر نشان می دهد. به علاوه فرض کنید α_1 نسبت دفعاتی باشد که فردی زیر ۵۰ سال در خیابانها وقت گذرانی می کند و α_2 همان نسبت برای افراد بالای ۵۰ سال باشد. این روش کدام مقدار را برای برآورد پیشنهاد می کند؟ این مقدار چه وقت تقریباً برابر p است؟

۱۷- فرض کنید ۵ درصد مردان و ۰٫۲۵ درصد زنان کدر رنگند. فرد کدر رنگی بتصادف انتخاب می شود. احتمال این که این فرد مرد باشد چقدر است؟ فرض کنید تعداد مردان و زنان برابر است اگر دراین جمعیت تعدادمردان دوبرابر زنان باشند این احتمال چقدر است ؟

۱۸- دو جعبه در نظر بگیرید که یکی محتوی ۱ مهره سیاه و ۱ مهره سفید است و دیگری ۲ مهره سیاه و ۱ مهره سفید است. جعبه ای بتصادف انتخاب شده و از آن مهره ای بتصادف بیرون کشیده می شود. احتمال این که این مهره سیاه باشد چقدر است ؟ احتمال این که جعبهٔ اول جعبه منتخب باشد، در صورتی که می دانیم این مهره سفید است، چقدر است؟

۱۹ - rigor و rigour به ترتیب املای امریکایی و انگلیسی کلمهٔ مذکور است. فردی که در هتل پاریس اقامت دارد، این کلمه را می نویسد و حرفی که بتصادف از املای وی انتخاب شده است یک حرف صدادار است. اگر ۴۰ درصد از انگلیسی زبانان در هتل انگلیسی و ۶۰ درصد امریکایی باشند، احتمال این که این نویسنده انگلیسی باشد چقدر است؟

۲۰ - کیسهٔ A محتوی ۲ گلوله سفید و ۱ گلوله سیاه است، در حالی که کیسهٔ B محتوی ۱ سفید و ۵ سیاه است. گلوله ای را بتصادف از کیسه A بیرون آورده و در B قرار می دهیم. گلوله ای را از B بیرون آورده و مشاهده می کنیم سفید است. احتمال این که گلولهٔ جا به جا شده سفید باشد چقدر است؟

۲۱ - در مثال ۳ ت فرض کنید که این مدرك جدید در معرض تعبیرهای ممکن مختلف است و در واقع تنها نشان می دهد که ۹۰ درصد احتمال دارد که این بزهکار مشخصه معین را دارا باشد. در این مورد چقدر احتمال دارد که این متهم گناهکار باشد (مانند قبل فرض کنید که وی دارای این مشخصه می باشد)؟

۲۲ - کلاس درس احتمالی مرکب از ۳۰ دانشجو است که ۱۵ نفر از آنها قوی، ۱۰ نفر متوسط و ۵ نفر ضعیفند. کلاس درس احتمال دومی نیز مرکب از ۳۰ دانشجو است که ۵ نفر قوی، ۱۰ نفر متوسط و ۱۵ نفر ضعیفند. شما (به عنوان کارشناس) از این اعداد با خبرید ولی نمی دانید مربوط به کدام کلاس است. اگر از دانشجویی که بتصادف از هر کلاس انتخاب شده است امتحان کرده و دریابید که دانشجوی کلاسA دانشجویی متوسط است درحالی که دانشجوی کلاس B ضعیف است، احتمال این که کلاس A کلاسی قوی تر باشد چقدر است؟

۲۳ - فروشگاههای A، B و C به ترتیب دارای ۵۰، ۷۵ و ۱۰۰ کارمندند که به ترتیب ۵۰، ۶۰ و ۷۰ درصد آنها زن هستند. کناره گیری از کار بین کلیه کارمندان، بدون توجه به جنسیت دارای احتمال برابر است. کارمندی استعفا می دهد، این کارمند زن است. احتمال این که وی کارمند فروشگاه C باشد چقدر است؟

۲۴ - (الف) قمار بازی در جیب خود دو سکه دارد یکی منظم و دیگری دو رویه شیر است. یکی از سکه ها را بتصادف انتخاب کرده و پرتاب می کند، سکه شیر می آید احتمال این که سکه منظم باشد چقدر است؟

(ب) فرض کنید که وی همان سکه را برای بار دوم پرتاب می کند و بازهم شیر می آید.

اکنون احتمال این که این سکه منظم باشد چقدر است؟

(پ) فرض کنید وی همان سکه را برای بار سوم پرتاب می کند و سکه خط می آید. اکنون احتمال این که سکهٔ منظم باشد چقدر است؟

۲۵ - کیسهٔ A دارای ۵ گلولهٔ سفید و ۷ گلولهٔ سیاه است. کیسهٔ B دارای سه گلولهٔ سفید و ۱۲ گلوله سیاه است. سکه منظمی را پرتاب می کنیم، اگر برآمد شیر باشد، گلوله ای از کیسهٔ A و اگر برآمد خط باشد از کیسهٔ B انتخاب می شود. فرض کنید گلولهٔ سفیدی انتخاب شده است؛ احتمال این که این سکه خط آمده باشد چقدر است؟

۲۶ - در مثال ۳ الف، احتمال این که کسی در سال دوم تصادفی داشته باشد، در صورتی که می دانیم در سال اول هیچ تصادفی نداشته است، چقدر است؟

۲۷ - نمونه ای را به حجم ۳ که به طریق زیر بیرون آورده شده است در نظر بگیرید: با کیسه ای که محتوی ۵ گلولهٔ سفید و ۷ قرمز است آغاز می کنیم. در هر مرحله یک گلوله بیرون آورده و رنگ آن را یادداشت می کنیم. سپس این گلوله را همراه با یک گلولهٔ اضافی همرنگ به کیسه بر می گردانیم. احتمالی را که این نمونه شامل دقیقاً (الف) ۵ گلوله سفید، (ب) ۱ گلولهٔ سفید (پ) ۳ گلولهٔ سفید (ت) ۲ گلوله سفید باشد، چقدر است؟

۲۸ - کیسه ای دارای b گلوله سیاه و r گلوله قرمز است. یکی از گلوله ها بتصادف بیرون آورده می شود، به هنگام بازگرداندن این گلوله به کیسهٔ C گلوله دیگر همرنگ با آن را در داخل کیسه قرار می دهیم. اکنون فرض کنید گلولهٔ دیگری بیرون می آوریم نشان دهید احتمال این که گلوله اول سیاه باشد، در صورتی که می دانیم گلولهٔ دومی که استخراج شده است قرمز است، برابر است با $(b / b + r + c)$.

۲۹ - یک دست ورق بازی را بُر زده و سپس به دو نیمهٔ مساوی ۲۶ تایی تقسیم می کنیم. یک کارت از یکی دو نیمه بیرون می آوریم، آس از کار در می آید. سپس این آس را در نیمهٔ دوم قرار می دهیم. این نیمه را بُر زده و کارتی از آن بیرون می آوریم. احتمالی را که این کارت یک آس باشد، محاسبه کنید.

راهنمایی : بر این که آیا کارت تعویض شده انتخاب شده است یا خیر شرطی کنید.

۳۰ - سه آشپز A، B و C نوع خاصی کیک را می پزند که به ترتیب با احتمالهای ۰/۰۲، ۰/۰۳ و ۰/۰۵ پُف نمی کند. در رستورانی که این آشپزها کار می کنند، A پنجاه درصد، B سی درصد و C بیست درصد این کیکها را می پزند. چه نسبتی از شکستها را A

باعث می شود؟

۳۱- جعبه ای محتوی ۳ سکه است. یکی دو رویه شیر، دیگری منظم و سومی با احتمال شیرآمدن ۰٫۷۵ ، اریب است. وقتی یکی از سه سکه بتصادف انتخاب و پرتاب می شود، شیر می آید. احتمالی را که این همان سکهٔ دو رویه شیر باشد محاسبه کنید.

۳۲- سه زندانی به وسیلهٔ زندانبان خود با خبر می شوند که یکی از آنها بتصادف برای اعدام انتخاب شده و دو نفر دیگر قرار است آزاد شوند. زندانی A از زندانبان می خواهد که بطور خصوصی این راز را که کدام یک از دوستان زندانیش آزاد خواهد شد با وی درمیان بگذارد، چون برملاشدن آن هیچ عیبی ندارد زیرا پیشاپیش می داند که لااقل یکی از این دو آزاد خواهند شد. زندانبان از پاسخ به سؤال وی خودداری کرده و دلیل می آورد که اگر A بداند کدام یک از دوستان هم‌بندش قرار است آزاد شود، آن گاه احتمال اعدام شدن وی از $\frac{۱}{۳}$ به $\frac{۱}{۲}$ افزایش می یابد، زیرا در این صورت خودش یکی از دو زندانی خواهد بود. نظر شما در مورد استدلال زندانبان چیست؟

۳۳- فرض کنید ۱۰ سکه داریم که اگرسکه i ام پرتاب شود، با احتمال $i/10$ ، $i = 1, ..., 10$ شیر ظاهر می شود. وقتی یکی از سکه ها بتصادف انتخاب و پرتاب می شود، شیر می آید. احتمال شرطی که این سکه سکهٔ پنجم باشد چقدر است؟

۳۴- کیسه ای محتوی ۵ گلوله سفید و ۱۰ گلوله سیاه است. تاس منظمی را پرتاب کرده و به تعداد خالهای رو شده، گلوله از کیسه بیرون می آوریم. احتمال این که همه گلوله های انتخاب شده سفید باشد چقدر است؟ احتمال مشروط که این تاس ۳ بیاید چقدر است، اگر همه گلوله های منتخب سفید باشد؟

۳۵- هریک از دو جعبه که از نظر ظاهر یکسانند دارای دو کشو است. در جعبهٔ A هریک از کشوها دارای یک سکهٔ نقره است و در جعبه B در یکی از کشوها سکه نقره و در دیگری سکه طلاست. جعبه ای بتصادف انتخاب می شود، یکی از کشوهای آن را باز کرده و سکه ای نقره در آن می یابیم . احتمال این که در کشو دیگر سکهٔ نقره باشد چقدر است؟

۳۶- فرض کنید که که آزمونی برای تشخیص سرطان وجود دارد که هم در مورد مبتلایان و هم غیر مبتلایان به این مرض ۹۵ درصد دقت دارد. اگر ۰٫۴ درصد جمعیتی مبتلا به سرطان باشد این احتمال را که فرد آزمون شده مبتلا به سرطان باشد محاسبه کنید، در صورتی که می دانیم نتیجهٔ آزمون این فرد مثبت بوده است.

۳۷- فرض کنید شرکت بیمه ای مردم را در یکی از طبقات سه گانهٔ مخاطره کم ، متوسط و زیاد قرار می دهد. سوابق آنها نشان می دهد که احتمالهای افرادی با مخاطرهٔ کم، متوسط و زیاد که در ظرف سال معینی در تصادف دخالت داشته اند به ترتیب عبارت است از ۰/۰۵ ، ۰/۱۵ و ۰/۳ . اگر ۲۰ درصد جمعیت «با مخاطرهٔ کم» ۵۰ درصد «با مخاطره متوسط» و ۳۰ درصد «با مخاطره زیاد» باشند چه نسبتی از جمعیت در سال معینی تصادف خواهند داشت؟ اگر بیمه گذار A در سال ۱۳۷۲ هیچ تصادفی نداشته باشد احتمال این که وی فردی با مخاطره کم (متوسط) باشد چقدر است؟

۳۸- اگر لازم بود الگویی ریاضی برای پیشامدهای E و F چنان که در قسمتهای (الف) تا (ث) شرح داده شده است، بسازید، آیا فرض می کردید که این پیشامدها مستقلند؟ دلیل خود را توضیح دهید.

(الف) E پیشامدی است که یک بازرگان زنی با چشمان آبی دارد و F پیشامدی که منشی او چشمان آبی دارد.

(ب) E پیشامدی است که استادی دارای خودرو است و F پیشامدی که نام وی در دفترچه تلفن موجود است.

(پ) E پیشامدی است که قد مردی کمتر از ۱۸۳ سانتی متراست و F پیشامدی که وزن وی بیش از ۹۰ کیلوگرم است.

(ت) E پیشامدی است که بانویی در آمریکا زندگی می کند و F پیشامدی که وی در نیمکرهٔ غربی زندگی می کند.

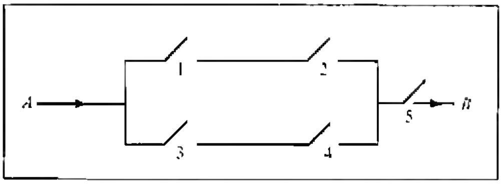
(ث) E پیشامدی است که فردا باران خواهد بارید و F پیشامدی که پس فردا باران خواهد بارید.

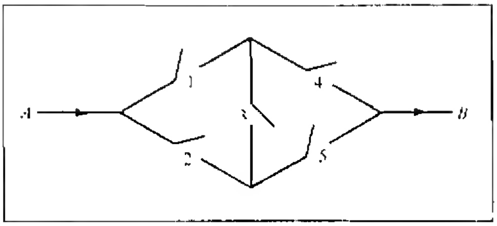
۳۹- در کلاس درسی ۴ دانشجوی پسر سال اول، ۶ دانشجوی دختر سال اول و ۶ دانشجوی پسر سال دوم وجود دارد. اگر قرار باشد جنسیت و کلاس مستقل باشند، هرگاه یک دانشجو بتصادف انتخاب شود، چند دانشجوی دختر سال دوم باید حاضر باشند.

۴۰- شخصی دستگاه قماری برای برنده شدن در رولت ابداع کرده است. وقتی وی شرط می بندد، بر سر قرمز شرط می بندد، و تنها وقتی شرط می بندد که ۱۰ چرخش قبلی رولت در شماره سیاهی متوقف شده باشد. دلیل وی این است که شانس برد او بسیار زیاد است زیرا احتمال ۱۱ چرخش متوالی منجر به شماره سیاه بسیار اندك است. نظر شما در مورد

این دستگاه چیست؟

۴۱- احتمال بسته شدن رله i ام در مدار زیر با p_i ، $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ، نشان داده شده است. اگر همه رله ها مستقلاً کار کنند، احتمال این که جریانی بین A و B ، برای مدارهای مربوطه، برقرار شود چقدر است؟





۴۲- یک دستگاه مهندسی مرکب از n قطعه ، دستگاه (k - از - n) $(k \le n)$ نامیده می شود. سیستم وقتی کار می کند که لااقل k قطعه از n قطعه کار کنند. فرض کنید همهٔ قطعات بطور مستقل از یکدیگر کار می کنند.

(الف) اگر قطعه i ام با احتمال P_i ، $i = 1, 2, 3, 4$ ، کار کند احتمالی را که یک دستگاه ۲ - ۱ از ـ ۴ کار کند محاسبه کنید.

(ب) (الف) را برای دستگاه ۳- از -۵ تکرار کنید.

(پ)برای دستگاه k - از - n وقتی همه p_i هابرابر p می شوند(یعنی $P_i = p, i = 1, 2, \ldots, n$) مسأله را تکرار کنید.

۴۳- ارگانیسم معینی دارای یک جفت از هریک از ۵ نوع ژن مختلف است (که آنها را با ۵ حرف اول الفبای انگلیسی نشان می دهیم). هر ژنی در دو شکل ظاهر می شود(که با حروف کوچک و بزرگ نشان می دهیم). فرض می شود که حرف بزرگ ژن غالب است ، به این مفهوم که اگر ارگانیسمی دارای جفت ژن xX باشد، آن گاه این ارگانیسم در خارج ظاهر ژن X را خواهد داشت. برای مثال، اگر X رنگ چشمان خاکستری و x رنگ چشمان آبی

را نمایش دهند، آن گاه فردی که دارای جفت ژن XX یا xX است چشمانی به رنگ خاکستری خواهد داشت، در حالی که فردی با جفت ژن xx چشم آبی خواهد بود. مشخصهٔ ظاهری یک ارگانیسم فنوتیپ آن نامیده می شود، در صورتی که ترکیب ژنتیکی آن به ژنوتیپ ارگانیسم موسوم است. (پس ۲ ارگانیسم با ژنوتیپهای مربوطه aA ، bB ، cC ، dD ، ee و AA ، BB ، CC ، DD ، ee ، دارای ژنوتیپهای متفاوت ولی فنوتیپهای یکسان خواهند بود.) در عمل جفت گیری بین ۲ ارگانیسم، هریک بتصادف، با یکی از جفت ژن خودش از هر نوع شرکت می کند. این ۵ سهم از یک ارگانیسم (یکی از هریک از ۵ نوع) فرض می شود که از یکدیگر و همچنین از سهم جفت خود مستقل باشند. در جفت گیری بین ارگانیسمهای دارای ژنوتیپهای aA ، bB ، cC ، dD ، eE و aa ، bB ، cC ، Dd ، ee ، احتمال این که فرزند (۱) از نظر فنوتیپی (۲) از نظر ژنوتیپی شبیه به

(الف) ارگانیسم اول

(ب) ارگانیسم دوم

(پ) هر دوی آنها، باشد چقدر است؟

(ت) به هیچ یک از آنها، نباشد چقدر است؟

۴۴- برای ملکه شانس ۵۰ - ۵۰ وجود دارد که حامل ژن بیماری خونی باشد. اگر ملکه حامل بیماری باشد هر شاهزاده، شانس، ۵۰ - ۵۰ برای ابتلا به این بیماری دارد. اگر ملکه دارای سه فرزند پسر بدون این بیماری باشد، احتمال این که حامل بیماری باشد چقدر است؟ اگر شاهزاده چهارمی به دنیا بیاید، احتمال این که وی این بیماری خونی را داشته باشد چقدر است؟

۴۵- در صبح روز ۳۱ شهریور ۱۳۶۰، جدول برد و باخت سه تیم رده اول بیسبال جام قهرمانی به صورت زیر بود:

تیم	برد	باخت
شاهین	87	72
پیروزی	86	73
آزادی	86	73

برای هر تیم سه بازی باقیمانده است که باید بازی کند. هرسه بازی پیروزی با آزادی است و سه بازی باقیمانده شاهین در مقابل تیم پارس است. فرض کنید برآمدهای کلیه بازیهای باقیمانده مستقلند و احتمال برد در هر بازی برای شرکت کنندگان برابر است. احتمالهای این که هریک از تیمها این جام را ببرد چقدر است؟ اگر دو تیم برای احراز مقام اولی برابرکنند، یک مسابقه اضافی دارند که در آن هر تیم شانس برابربرای برنده شدن دارد.

۴۶- انجمن شهری با ۷ عضو، شامل یک کمیته منتخب با ۳ عضو است. پیشنهادات جدید برای وضع قانون ابتدا به این کمیته و سپس به انجمن می رود، اگر حداقل ۲ نفر از ۳ نفر عضو کمیتهٔ منتخب، این قانون را تصویب کنند، در این مرحله برای تصویب قانون اکثریت آرا (حداکثر ۴ رای) لازم است. اکنون یک پیشنهاد جدید قانون را درنظر گرفته و فرض کنید که هر عضو انجمن شهر، مستقلاً، با احتمال p آن را مورد تصویب قرار می دهد. احتمال این که رای یک عضو کمیته منتخب قاطع باشد چقدر است؟ به این مفهوم که برگشتن رأی این عضو، سرنوشت نهایی این قانون را عوض کند. احتمال متناظر برای یک عضو مفروضی از انجمن که در کمیته منتخب نیست چقدر است؟

۴۷- فرض کنید شانس پسر یا دختر بودن نوزاد در یک خانواده مستقل از توزیع جنسیت فرزندان دیگر خانواده، برابر است. اگر خانواده ای دارای ۵ فرزند باشد، مطلوب است احتمال هریک از پیشامدهای زیر:

(الف) همهٔ فرزندان از یک جنس باشند.

(ب) سه فرزند بزرگتر پسر و بقیه دختر باشند.

(پ) دقیقاً سه فرزند پسر باشند.

(ت) دو فرزند بزرگتر پسر باشند.

(ث) حداقل یک فرزند دختر باشد.

۴۸- احتمال برنده شدن در یک پرتاب تاس برابر p است. A بازی را شروع می کند و در صورت باخت، تاس را به B واگذار می کند که به نوبهٔ خود سعی می کند برنده شود. این دو نفر تاس را آن قدر پرتاب می کنند تا یکی از آنها برنده شود. احتمال برنده شدن مربوط به هریک از آنها چقدر است؟ اگر k بازیکن داشته باشیم، مسأله را تکرار کنید.

۴۹- مسأله ۴۸ را، با این فرض که وقتی A تاس را می ریزد با احتمال P_1 و وقتی B می ریزد با احتمال P_2 برنده می شود تکرار کنید.

۵۰- سه بازیکن همزمان سکه هایی را پرتاب می کنند. سکه پرتاب شده به وسیلهٔ A (B) [C] با احتمال P_1 (P_2) $[P_3]$ شیر می آید. اگر فردی برآمدی متفاوت از دونفر دیگر به دست آورد از بازی خارج می شود. اگر هیچ فردی از بازی خارج نشود بازیکنان به پرتاب ادامه می دهند تا این که سرانجام یک نفر از بازی خارج شود. احتمال این که A از بازی خارج شده باشد چقدر است؟

۵۱- فرض کنید E و F پیشامدهای ناسازگار یک تجربه اند. نشان دهید اگر آزمایشهای مستقل از این تجربه انجام شوند، آن گاه E با احتمال $P(E) / [P(E) + P(F)]$ قبل از F رخ می دهد.

۵۲- A و B سکه هایی را پرتاب می کنند، کسی که سکه اش به خط مفروضی نزدیکتر باشد، ۱ ریال از دیگری می برد. اگر A با ۳ و B با ۷ ریال شروع کرده باشند، احتمال این که پول A تمام شود، در صورتی که مهارت هردو یکسان باشد چقدر است؟ اگر A بازیکن ماهرتری باشد که ۶۰ درصد موارد برنده می شود، این احتمال چقدر است؟

۵۳- در پرتاب متوالی یک جفت تاس متعادل، احتمال به دست آوردن ۲ عدد ۷ قبل از ۶ عدد زوج چقدر است؟

۵۴- بازیکنان مهارت یکسانی دارند و در مسابقه ای احتمال این که یکی از دو حریف پیروز شودبرابر $\frac{1}{2}$ است. یک گروه 2^n بازیکن بتصادف به حریفان دوتایی تقسیم می شوند. 2^{n-1} برنده باز بتصادف جفت می شوند و به همین ترتیب الی آخر: تا این که برنده ای تک باقی بماند. دوحریف مشخصA و B را درنظر گرفته و پیشامدهای A_i ، $i \le n$ ارا با :

A_i : A در دقیقاً i مسابقه بازی می کند،

E : A و B هرگز باهم بازی نمی کنند. تعریف می کنیم. مطلوب است.

(الف) $P(A_i)$ ، $i = 1, ..., n$.

(ب) $P(E)$.

(پ) فرض کنید $P_n = P(E)$. نشان دهید

$$P_n = \frac{1}{2^n - 1} + \frac{2^n - 2}{2^n - 1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 P_{n-1}$$

از این فرمول برای تحقیق درستی جواب حاصل در (ب) استفاده کنید.

۵۵- یک سرمایه گذار بازار بورس دارای سهامی در یک بورس است که ارزش فعلی آن ۲۵ امتیاز است. این شخص تصمیم دارد که سهام خود را در صورتی که ۱۰ امتیاز پایین یا

۴۰ امتیاز بالا رود بفروشد. اگر هر تغییر بها با احتمال ۰/۵۵، یک امتیاز بالا و با احتمال ۰/۴۵ یک امتیاز پایین برود، و تغییرات متوالی مستقل باشند، احتمال این که این سرمایه گذار به صورت برنده کنار برود چقدر است؟

۵۶- A و B سکه هایی پرتاب می کنند. A بازی را شروع و پرتاب را آن قدر ادامه می دهد تا خط بیاید. در این مرحله B پرتاب سکه را آغاز و بازی را آن قدر ادامه می دهد تا خط بیاید و سپس A این بازی را ادامه می دهد و به همین ترتیب الی آخر. فرض کنید P_1 احتمال این که وقتی سکه را A پرتاب می کند شیر بیاید، نشان دهد و P_2 همین احتمال را نشان دهد وقتی B سکه را پرتاب می کند. برنده این بازی اولین نفری است که

(الف) ۲ شیر متوالی بیاورد.

(ب) جمعاً ۲ شیر بیاورد.

(پ) شیر متوالی بیاورد.

(ت) جمعاً ۳ شیر بیاورد

احتمالی را که A، در هر حالت، برنده شود به دست آورید.

۵۷- تاس A دارای ۴ وجه قرمز و ۲ وجه سفید است، در حالی که تاس B دارای ۲ وجه قرمز و ۴ وجه سفید است. سکه ای منظم را یک بار پرتاب می کنیم. اگر خط بیاید، بازی با تاس A ادامه می یابد و اگر شیر بیاید با تاس B.

(الف) نشان دهید که احتمال وجه قرمز در هر پرتاب برابر $\frac{1}{2}$ است.

(ب) اگر دو پرتاب اول به قرمز منتهی شود، احتمال قرمز در ردیف سوم چقدر است؟

(ج) اگر در دو پرتاب اول قرمز بیاید، احتمال این که با تاس A باشد چقدر است؟

۵۸- در کیسه ای ۱۲ گلوله که ۴ تای آنها سفید است وجود دارد. سه بازیکن ـ A، B، C ـ پی در پی از این کیسه گلوله بیرون می آورند، ابتدا A، سپس B و سرانجام C، سپس A و به همین ترتیب الی آخر. برنده اولین نفری است که یک گلوله سفید بیرون بکشد. احتمالهای بُرد هر بازیکن را پیدا کنید اگر

(الف) هر گلوله پس از استخراج به کیسه برگردانده شود.

(ب) گلوله های استخراج شده جانشین شوند.

۵۹- مسألهٔ ۵۸ را با فرض این که هریک از ۳ بازی کن از کیسه مخصوص خود گلوله انتخاب کنند تکرار کنید. یعنی این که سه کیسه مختلف هریک شامل ۱۲ گلوله که ۴ تای آنها سفید

است وجود داشته باشد .

۶۰- در مثال ۵ ت ، احتمال شرطی که سکه i ام انتخاب شود چقدر است؟ در صورتی که می دانیم همه n آزمایش اول شیر آمده است .

۶۱- در دستور توالی لاپلاس ، مثال ۵ ت ، آیابرآمدهای پرتابهای متوالی مستقل اند ؟ شرح دهید .

۶۲- فردی که در دادگاهی مرکب از ۳ قاضی محاکمه می شود، گناهکار قلمداد می شود اگر حداقل ۲ قاضی علیه او رأی دهند. فرض کنید هرگاه این متهم در واقع مجرم باشد، هر قاضی بطور مستقل با احتمال ۰/۷ رأی به گناهکاری وی می دهد، در حالی که اگر متهم در واقع بی گناه باشد، این احتمال به ۰/۲ تنزل پیدا می کند. اگر ۷۰ درصد متهمان گناهکار باشند، احتمال شرطی را که قاضی شماره ۳ رأی بر گناهکاری بدهد محاسبه کنید، در صورتی که می دانیم .

(الف) قاضی شماره ۱ و ۲ رأی بر گناهکاری وی می دهند.

(ب) قاضی شماره ۱ رأی بر گناهکاری و قاضی شماره ۲ رأی بر بی گناهی وی می دهند .

(پ) قاضی شماره ۱ و ۲ هر دو رأی بر بی گناهی وی می دهند.

فرض کنید E_i ، $i = 1, 2, 3$ ، پیشامدی را که قاضی i رأی بر گناهکاری می دهد نمایش دهد . آیا این پیشامدها مستقلند؟ آیا این پیشامدها بطور مشروط مستقلند ؟ شرح دهید .

فصل چهارم

متغیرهای تصادفی

۱ - مقدمه

در اغلب آزمایشهایی که انجام می شود به تابعی از برآمد حاصل در مقابل خود برآمد علاقه مندیم. مثلاً در پرتاب یک تاس اغلب می خواهیم مجموع دو تاس را بدانیم تا مقادیر هریک از آنها را. یعنی ممکن است فقط مجموع ۷ مورد توجه باشد نه برآمدهای (۶ ، ۱)، (۵، ۲)، (۴، ۳)، (۳، ۴) ، (۲ ، ۵) یا (۱ ، ۶) . همین طور در پرتاب سکه ها ممکن است تعداد کل شیرها مورد توجه باشد نه دنبالهٔ شیر و خطهای حاصل از انجام آزمایش، این کمیتها، یا به عبارت دقیقتر این توابع حقیقی، را که بر فضای نمونه تعریف شده اند **متغیرهای تصادفی** نامند.

چون مقدار یک متغیر تصادفی با برآمد آزمایش معین می شود، می توانیم به مقادیر ممکن متغیر تصادفی احتمالهایی نسبت دهیم.

مثال ۱ الف . فرض کنید آزمایش مورد توجه پرتاب ۳ سکهٔ سالم باشد. اگر Y تعداد شیرهای ظاهر شده باشد، آن گاه Y یک متغیر تصادفی است که مقادیر ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ را با احتمالهای زیر اختیار می کند.

$$
\begin{aligned}
P\{Y=0\} &= P\{(T,T,T)\} = \tfrac{1}{8} \\
P\{Y=1\} &= P\{(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T)\} = \tfrac{3}{8} \\
P\{Y=2\} &= P\{(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T)\} = \tfrac{3}{8} \\
P\{Y=3\} &= P\{(H,H,H)\} = \tfrac{1}{8}
\end{aligned}
$$

چون Y باید یکی از مقادیر ۰ تا ۳ را اختیار کند، باید داشته باشیم

$$1 = P\left(\bigcup_{i=0}^{3}\{Y = i\}\right) = \sum_{i=0}^{3} P\{Y = i\}$$

که با توجه به احتمالهای فوق تساوی بر قرار است.

مثال ۱ ب. سه مهره بتصادف و بدون جایگذاری از جعبه‌ای دارای ۲۰ مهره به شماره‌های ۱ تا ۲۰ خارج می کنیم. اگر شرط بردن بازی این باشد که حداقل یکی از مهره های خارج شده شماره‌ای مساوی یا بزرگتر از ۱۷ داشته باشد، احتمال بردن شرط چقدر است؟

حل: فرض کنید X بزرگترین عدد خارج شده باشد. در این صورت X یک متغیر تصادفی است که مقادیر ۳، ۴، . . . ، ۲۰ را اختیار می کند. علاوه براین، اگر فرض کنیم هریک از $\binom{20}{3}$ انتخاب ممکن هم احتمال است، آن گاه

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}} \qquad i = 3, \ldots, 20 \tag{۱-۱}$$

برای به دست آوردن معادلهٔ (۱-۱) توجه کنید که پیشامد { X = i } وقتی رخ می دهد که مهره شمارهٔ i و دو مهره از بین شماره های ۱ تا i - 1 انتخاب شده باشد. همان طور که می دانیم تعداد حالات مساعد عبارت است از $\binom{1}{1}\binom{i-1}{2}$. از این معادله دیده می شود که

$$P\{X = 20\} = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{3}{20} = .150$$

$$P\{X = 19\} = \frac{\binom{18}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{51}{380} = .134$$

$$P\{X = 18\} = \frac{\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{34}{285} = .119$$

$$P\{X = 17\} = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{2}{19} = .105$$

چون پیشامد $\{X \geq 17\}$ عبارت است از اجتماع پیشامدهای ناسازگار $\{X = i\}$ ، $i = 17, 18, 19, 20$ ، پس احتمال بردن شرط برابر است با

$$P\{X \geq 17\} = .105 + .119 + .134 + .150 = .508$$

مثال ۱پ. سکه‌ای که احتمال شیر آمدنش p است بطور مستقل متوالیاً پرتاب می شود تا یک شیر بیاید یا تجربه n بار تکرار شود. اگر X تعداد پرتابهای لازم باشد، X یک متغیر تصادفی است که مقادیر ۱ ، ۲ ، . . . ، n را با احتمالهای زیر اختیار می کند

$$P\{X = 1\} = P\{H\} = p$$
$$P\{X = 2\} = P\{(T, H)\} = (1 - p)p$$
$$P\{X = 3\} = P\{(T, T, H)\} = (1 - p)^2 p$$

$$P\{X = n - 1\} = P\{(\underbrace{T, T, \ldots, T}_{n-2}, H)\} = (1 - p)^{n-2} p$$
$$P\{X = n\} = P\{(\underbrace{T, T, \ldots, T}_{n-1}, T), (\underbrace{T, T, \ldots, T}_{n-1}, H)\} = (1 - p)^{n-1}$$

برای کنترل مقادیر به دست آمده می توان نوشت

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X = i\}\right) &= \sum_{i=1}^{n} P\{X = i\} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} p(1-p)^{i-1} + (1-p)^{n-1} \\ &= p\left[\frac{1-(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)}\right] + (1-p)^{n-1} \\ &= 1 - (1-p)^{n-1} + (1-p)^{n-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

مثال ۱ت. سه مهره از جعبه ای که دارای ۳ مهرهٔ سفید، ۳ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ سیاه است بتصادف خارج می شود. فرض کنید به ازای هر مهرهٔ سفید ۱ ریال برنده و به ازای هر مهر سیاه ۱ ریال بازنده می شویم. اگر X مقدار کل برد در این بازی باشد، آن گاه X یک متغیر تصادفی است که مقادیر $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ را با احتمالهای زیر اختیار می کند

$$P\{X=0\} = \frac{\binom{5}{3} + \binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{55}{165}$$

$$P\{X=1\} = P\{X=-1\} = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2} + \binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{39}{165}$$

$$P\{X=2\} = P\{X=-2\} = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{15}{165}$$

$$P\{X=3\} = P\{X=-3\} = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{1}{165}$$

احتمالهای فوق با توجه به این مطلب به دست آمده اند که مثلاً برای رخ دادن پیشامد $\{X = 0\}$ یا باید هر سه مهره سیاه باشد یا باید از هر رنگ یک مهره انتخاب شده باشد . همین طور ، پیشامد $\{X = 1\}$ وقتی رخ می دهد که یک سفید و ۲ سیاه یا ۲ سفید و یک قرمز انتخاب شده باشد . برای کنترل اعداد به دست آمده می توان نوشت

$$\sum_{i=0}^{3} P\{X=i\} + \sum_{i=1}^{3} P\{X=-i\} = \frac{55+39+15+1+39+15+1}{165} = 1$$

بنابراین احتمال برنده شدن عبارت است از

$$\sum_{i=1}^{3} P\{X=i\} = \tfrac{55}{165} = \tfrac{1}{3}$$

مثال ۱ ث . فرض کنید N کوپن از انواع متمایز داریم و هر بار یکی از آنها مستقل از احتمالهای قبلی با احتمالهای مساوی انتخاب می شود . یک متغیر تصادفی مورد توجه T عبارت از تعداد کوپنهای لازم است تا مجموعه انتخاب شده شامل یک کوپن از هر نوع باشد . به جای محاسبهٔ مستقیم $P\{T = n\}$ ابتدا احتمال پیشامد $\{T > n\}$ را محاسبه می کنیم . برای این کار n را ثابت می گیریم و پیشامدهای A_1 ، A_2 ، . . . ، A_N را به صورت زیر تعریف می کنیم : A_j پیشامد نبودن کوپن نوع j ، $j = 1, \ldots, N$ در میان n کوپن اولیه است . بنابراین ،

$$P\{T > n\} = P\left(\bigcup_{j=1}^{N} A_j\right)$$
$$= \sum_j P(A_j) - \sum_{j_1<j_2}\sum P(A_{j_1}A_{j_2}) + \cdots$$
$$+ (-1)^{k+1} \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_k}\sum\cdots\sum P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k}) \cdots$$
$$+ (-1)^{N+1}P(A_1A_2\cdots A_N)$$

حال A_j رخ می دهد اگر هریک از n کوپن از نوع j نباشد. چون هریک از کوپنها با احتمال $\frac{N-1}{N}$ از نوع j نخواهد بود، با توجه به فرض استقلال نوع کوپنهای متوالی داریم

$$P(A_j) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$$

همچنین پیشامد $A_{j_1}A_{j_2}$ وقتی رخ می دهد که هیچ یک از n کوپن اولیه از نوع j_1 یا j_2 نباشد. پس، با استفادهٔ مجدد از استقلال داریم

$$P(A_{j_1}A_{j_2}) = \left(\frac{N-2}{N}\right)^n$$

به همین دلیل می توان نوشت:

$$P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k}) = \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$$

و دیده می شود که برای $n > 0$

$$P\{T > n\} = N\left(\frac{N-1}{N}\right)^n - \binom{N}{2}\left(\frac{N-2}{N}\right)^n + \binom{N}{3}\left(\frac{N-3}{N}\right)^n - \cdots$$
$$+ (-1)^N\binom{N}{N-1}\left(\frac{1}{N}\right)^n \qquad (۲-۱)$$
$$= \sum_{i=1}^{N-1}\binom{N}{i}\left(\frac{N-i}{N}\right)^n(-1)^{i+1}$$

با توجه به مطالب فوق احتمال $T = n$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$P\{T > n-1\} = P\{T = n\} + P\{T > n\}$$

در نتیجه

$$P\{T = n\} = P\{T > n-1\} - P\{T > n\}$$

متغیر تصادفی جالب دیگر عبارت است از انواع مختلف کوپنهایی که در n انتخاب اول

وجود دارد، این متغیر تصادفی را D_n می نامیم. برای محاسبهٔ $P(D_n = k)$ ، ابتدا توجه خود را به مجموعهٔ خاصی از k نوع متمایز معطوف می کنیم، و این احتمال را که این مجموعه شامل مجموعه انواع متمایز حاصل در n انتخاب اول است، محاسبه می کنیم. اکنون برای این که این وضع پیش آید لازم و کافی است که از n کوپن اولیه

A : هر کوپن یکی از این k نوع باشد.

B : هریک از این k نوع ارائه شده باشد.

حال هریک از کوپنهای انتخاب شده، یکی از k نوع کوپن با احتمال $\frac{k}{N}$ است، و بنابراین احتمال A برابر $\left(\frac{k}{N}\right)^n$ است. همچنین اگر معلوم باشد که کوپن به دست آمده یکی از k نوع خاص است، بآسانی دیده می شود که هریک از این k نوع کوپن هم احتمال است. بنابراین احتمال B به شرط A برابر است با احتمال این که مجموعه ای از n کوپن که هریک با احتمال مساوی می تواند یکی از نوعهای ممکن باشد، شامل یک مجموعه کامل از تمام k نوع است. ولی این احتمال دقیقا برابر است با

$$P(A) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

$$P(B|A) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i}\left(\frac{k-i}{k}\right)^n (-1)^{i+1}$$

بالاخره چون $\binom{N}{k}$ انتخاب ممکن برای مجموعه ای از k نوع وجود دارد می توان نوشت

$$\begin{aligned} P\{D_n = k\} &= \binom{N}{k} P(AB) \\ &= \binom{N}{k}\left(\frac{k}{N}\right)^n \left[1 - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i}\left(\frac{k-i}{k}\right)^n (-1)^{i+1}\right] \end{aligned}$$

۲- توابع توزیع

تابع توزیع تجمعی (c. d. f.) ، یا به عبارت ساده تر تابع توزیع متغیر تصادفی X که آن را با F نشان می دهند ، برای تمام اعداد حقیقی b ، $-\infty < b < \infty$ به صورت زیر تعریف می شود

$$F(b) = P\{X \le b\}$$

به عبارت دیگر ، F(b) احتمال این پیشامد است که متغیر تصادفی X مقداری کمتر یا مساوی b اختیار کند. بعضی از خواص تابع F به قرار زیر است:

۱ - تابع F نانزولی است، یعنی، اگر $a < b$، آن‌گاه $F(a) \le F(b)$.

۲ - $\lim_{b \to \infty} F(b) = 1.$

۳ - $\lim_{b \to -\infty} F(b) = 0.$

۴ - تابع F از راست پیوسته است. یعنی برای هر b و دنباله نزولی b_n، $n \ge 1$، که به b همگراست داریم $\lim_{n \to \infty} F(b_n) = F(b)$

خاصیت ۱ برقرار است زیرا برای $a < b$ پیشامد $\{X \le a\}$ جزئی از پیشامد $\{X \le b\}$ است، بنابراین احتمال آن نمی‌تواند بزرگتر باشد. خاصیت ۲، ۳و ۴ با توجه به خاصیت پیوستگی احتمالها (بخش ۶ از فصل ۲) برقرارند. مثلاً، برای اثبات خاصیت ۲ توجه کنید که اگر b_n به ∞ صعود کند آن‌گاه پیشامدهای $\{X \le b_n\}$، $n \ge 1$، صعودی هستند و اجتماع آنها پیشامد $\{X < \infty\}$ است. بنابراین بنا به خاصیت پیوستگی احتمالها،

$$\lim_{n \to \infty} P\{X \le b_n\} = P\{X < \infty\} = 1$$

اثبات خاصیت ۳ نیز به همین طریق است و آن را به عنوان تمرین می گذاریم. برای اثبات خاصیت ۴ توجه کنید که اگر b_n به b نزول کند، آن گاه $\{X \le b_n\}$، $n \ge 1$، پیشامدهای نزولی هستند که اشتراك آنها پیشامد $\{X \le b\}$ است. بنابراین با توجه به خاصیت پیوستگی می‌توان نوشت

$$\lim_{n} P\{X \le b_n\} = P\{X \le b\}$$

تمام مسائل احتمال در مورد X را می توان بر حسب تابع F پاسخ داد. مثلاً به ازای تمام مقادیر $a < b$،

$$P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a) \quad \text{برای هر} \quad a < b \tag{۱-۲}$$

برای روشنتر شدن مطلب می توان پیشامد $\{X \le b\}$ را به صورت اجتماع پیشامدهای جدا از هم $\{X \le a\}$ و $\{a < X \le b\}$ نوشت. یعنی،

$$\{X \le b\} = \{X \le a\} \cup \{a < X \le b\}$$

در نتیجه

$$P\{X \le b\} = P\{X \le a\} + P\{a < X \le b\}$$

که بآسانی معادله (۲-۱) از آن به دست می آید .

اگربخواهیم احتمال پیشامد $\{X < b\}$ را محاسبه کنیم، می توانیم باتوجه به خاصیت پیوستگی بنویسیم

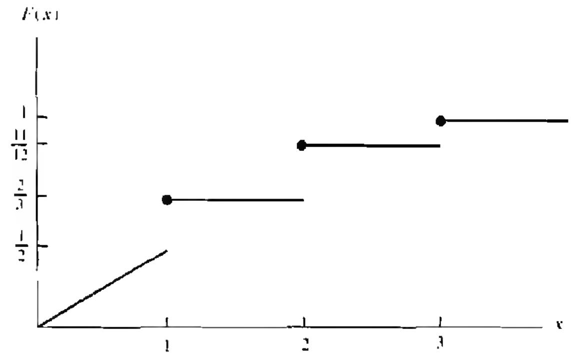
$$\begin{aligned} P\{X < b\} &= P\left(\lim_{n\to\infty}\left\{X \le b - \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(X \le b - \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} F\left(b - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

توجه کنیدکه $P\{X < b\}$ لزوماًبرابر$F(b)$ نخواهدبود، زیرا $F(b)$ شامل احتمال $X = b$نیز هست .

مثال ۲ الف. تابع توزیع متغیر تصادفی X عبارت است از

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{2}{3} & 1 \le x < 2 \\ \dfrac{11}{12} & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x \end{cases}$$

نمودار تابع $F(x)$ در شکل ۴-۱ رسم شده است .



شکل ۴-۱ نمودار F (x)

مطلوب است محاسبهٔ : الف ـ $P\{X < 3\}$ ، ب ـ $P\{X = 1\}$ ، ج ـ $P\left\{X > \frac{1}{2}\right\}$ و د ـ $P\{2 < X \leq 4\}$.

حل :

$$P\{X < 3\} = \lim_n P\left\{X \leq 3 - \frac{1}{n}\right\} = \lim_n F\left(3 - \frac{1}{n}\right) = \frac{11}{12}$$

$$P\{X = 1\} = P\{X \leq 1\} - P\{X < 1\}$$

$$= F(1) - \lim_n F\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P\left\{X > \frac{1}{2}\right\} = 1 - P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$$

$$= 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$P\{2 < X \leq 4\} = F(4) - F(2)$$

$$= \frac{1}{12}$$

۳- متغیرهای تصادفی گسسته

یک متغیر تصادفی که بتواند حداکثر تعداد شمارا مقدار اختیار کند ، گسسته نامیده می شود . برای یک متغیر تصادفی گسستهٔ X ، تابع جرم احتمال $p(a)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$p(a) = P\{X = a\}$$

تابع جرم احتمال $p(a)$ برای حداکثر تعداد شمارا از مقادیر a مثبت است . یعنی ، اگر X فقط مقادیر x_1 ، x_2 ، . . . را اختیار کند ، آن گاه

$$\begin{array}{ll} p(x_i) \geq 0 & i = 1, 2, \ldots \\ p(x) = 0 & \text{x سایر مقادیر} \end{array}$$

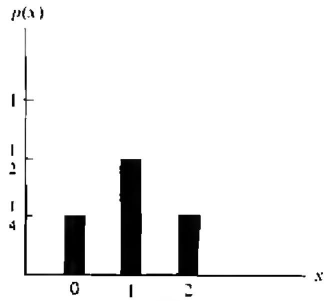
چون X باید یکی از مقادیر x_i را اختیار کند ، داریم

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

اغلب آموزنده است که تابع جرم احتمال را به صورت نمودار نشان دهیم، به این ترتیب که $p(x_i)$ را روی محور yها و x_i را روی محور xها جدا کنیم. مثلاً، اگر تابع جرم احتمال X به صورت زیر باشد

$$p(0) = \tfrac{1}{4} \qquad p(1) = \tfrac{1}{2} \qquad p(2) = \tfrac{1}{4}$$

نمودار آن را می توان به صورت شکل ۴-۲ رسم کرد. به طریقی مشابه، نمودار تابع جرم احتمال متغیر تصادفی که مجموع خالهای روشده در پرتاب دو تاس را نمایش می دهد، نظیر شکل ۴-۳ می باشد.



شکل ۴-۲

شکل ۴-۳

مثال ۳ الف. تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X عبارت است از

$$p(i) = c\lambda^i/i!,\ i = 0, 1, 2, \ldots$$

که در آن λ یک مقدار مثبت است.

۱- مقدار $P\{X = 0\}$ را محاسبه کنید.

۲- مقدار $P\{X > 2\}$ را محاسبه کنید.

حل: چون $\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1$ ، داریم

$$c \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = 1$$

از طرفی می دانیم , $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$ ، در نتیجه

$$ce^{\lambda} = 1 \qquad \text{یا} \qquad c = e^{-\lambda}$$

حال می توان نوشت

$$P\{X = 0\} = e^{-\lambda}\lambda^0/0! = e^{-\lambda}$$

$$P\{X > 2\} = 1 - P\{X \le 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\}$$

$$= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$$

تابع توزیع تجمعی F را می توان برحسب p(a) به صورت زیر نوشت

$$F(a) = \sum_{x \le a} p(x)$$

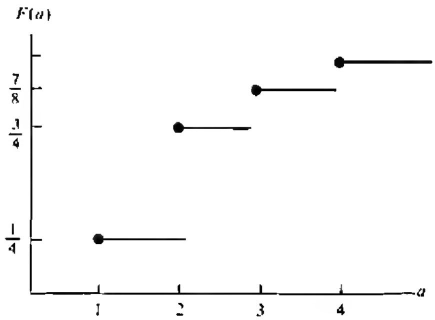
اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با مقادیر ممکن x_1 ، x_2 ، . . . باشد به قسمی که $x_1 < x_2 < \ldots$ ، آن گاه تابع توزیع آن F یک تابع پله ای است. یعنی مقدار F در فاصله $[x_{i-1}, x_i[$ ثابت است و دارای یک پله (یا جهش) به اندازهٔ $p(x_i)$ در x_i خواهد بود. مثلاً اگر X دارای تابع جرم احتمال زیر باشد

$$p(1) = \tfrac{1}{4} \qquad p(2) = \tfrac{1}{2} \qquad p(3) = \tfrac{1}{8} \qquad p(4) = \tfrac{1}{8}$$

آن گاه تابع توزیع تجمعی آن عبارت است از

$$F(a)=\begin{cases}0 & a<1\\ \frac{1}{4} & 1\le a<2\\ \frac{3}{4} & 2\le a<3\\ \frac{7}{8} & 3\le a<4\\ 1 & 4\le a\end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۴-۴ رسم شده است .



شکل ۴-۴

باید توجه داشته باشیم که ارتفاع هر پله در هر یک از مقادیر ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ برابر است با احتمال این که X آن مقدار خاص را اختیار کند .

متغیرهای تصادفی گسسته اغلب بر حسب مقادیر تابع جرم دسته‌بندی می‌شود . در چند بخش بعدی بعضی از آنها را بررسی خواهیم کرد .

۴ - متغیرهای تصادفی برنولی و دوجمله‌ای

تجربه یا آزمایشی را در نظر بگیرید که برآمد آن را بتوان به دو دسته «موفقیت» یا «شکست» تقسیم کرد . وقتی برآمد ، یک موفقیت است می‌نویسیم $X = 1$ و وقتی برآمد یک شکست است می‌نویسیم $X = 0$ ، آن گاه ، تابع جرم احتمال X عبارت است از

$$p(0) = P\{X = 0\} = 1 - p$$
$$p(1) = P\{X = 1\} = p \qquad (۱-۴)$$

که در آن p ، $0 \le p \le 1$ احتمال این است که نتیجهٔ آزمایش موفقیت باشد.

متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی برنولی گویند (به نام برنولی ریاضیدان سوئیسی) اگر تابع جرم احتمال آن با معادلات (۴-۱) داده شود که در آن $p \in (0, 1)$.

حال فرض کنید n تجربه برنولی را که احتمال موفقیت آن p و احتمال شکست آن $1 - p$ است، بطور مستقل انجام دهیم. اگر X تعداد موفقیتها در n تجربه باشد، آن گاه، X را یک متغیر **دوجمله‌ای** با پارامترهای (n, p) گویند، پس یک متغیر تصادفی برنولی همان متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای $(1, p)$ است.

تابع جرم احتمال متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای (n, p) عبارت است از

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{۴-۲}$$

درستی معادلهٔ (۴-۲) را می توان با توجه به این مطلب که احتمال هر دنباله از n برآمد شامل i موفقیت و $n - i$ شکست با توجه به فرض استقلال تجربه ها، برابر $p^i (1-p)^{n-i}$ است، ثابت کرد. زیرا تعداد دنباله های متفاوت فوق برابر $\binom{n}{i}$ است. مثلاً اگر $n = 4$ و $i = 2$ آن گاه به $\binom{4}{2} = 6$ طریق ۲ موفقیت و ۲ شکست به دست می آید، یعنی

$(s, s, f, f), (s, f, s, f), (s, f, f, s), (f, s, s, f), (f, s, f, s)$, or (f, f, s, s)

که در آن (s, s, f, f) یعنی دو آزمایش اول موفقیت و دو آزمایش آخر شکست بوده است.

چون هریک از این برآمدها با احتمال $p^2 (1-p)^2$ رخ می دهد احتمال مطلوب برای ۲ موفقیت در ۴ آزمایش عبارت است از $\binom{4}{2} p^2 (1-p)^2$.

توجه کنید بنا به قضیهٔ دو جمله ای مجموع احتمالها برابر یک می شود، یعنی

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = [p + (1-p)]^n = 1$$

مثال ۴ الف. پنج سکه سالم را می اندازیم. اگر برآمدها را مستقل فرض کنیم، تابع جرم احتمال تعداد شیر ها را پیدا کنید.

حل : اگر X تعداد شیرها (موفقیتها) باشد، آن گاه X یک متغیر تصادفی دو جمله ای با

پارامترهای ($n = 5, p = \frac{1}{2}$) است. بنابراین از معادله (۴-۲) نتیجه می شود

$$P\{X=0\} = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$P\{X=1\} = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$$

$$P\{X=2\} = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}$$

$$P\{X=3\} = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$$

$$P\{X=4\} = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$$

$$P\{X=5\} = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$$

مثال ۴ ب. می دانیم پیچهای ساخت یک کارخانه با احتمال ۰٫۰۱ مستقل از یکدیگر معیوبند. این کارخانه پیچها را در بسته های ۱۰ تایی به فروش می رساند و پول خریدار را پس می دهد، اگر حداکثر یکی از ۱۰ پیچ معیوب باشد. چه نسبتی از بسته های فروش شده را کارخانه باید تعویض کند؟

حل: اگر X تعداد پیچهای معیوب در یک بسته باشد، در آن صورت X یک متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای (۰٫۰۱ و ۱۰) است. در نتیجه احتمال این که بسته تعویض شود عبارت است از

$$\begin{aligned}1 - P\{X=0\} - P\{X=1\} &= 1 - \binom{10}{0}(.01)^0(.99)^{10} - \binom{10}{1}(.01)^1(.99)^9 \\ &\approx .004\end{aligned}$$

بنابراین، ۰٫۴ درصد بسته ها باید تعویض شوند.

مثال ۴ پ. بازی با گردونهٔ شانس بسیار معمول است. یک بازیکن روی یکی از شماره های ۱ تا ۶ شرط بندی می کند. سپس سه تاس ریخته می شود، و اگر عدد شرط بندی شده

i بار، $i = 1, 2, 3$ ، ظاهر شود، آن گاه بازیکن i واحد برنده می شود، از طرف دیگر ، اگر عدد شرط بندی شده ظاهر نگردد بازیکن ۱ واحد با زنده خواهد بود. آیا این بازی برای بازیکن عادلانه است ؟ (در واقع بازی با گرداندن یک گردونه که می تواند در سه شماره از ۱ تا ۶ توقف کند شروع می شود، ولی از نظر ریاضی معادل ریختن سه تاس است) .

حل : اگر تاسها را سالم و مستقل از یکدیگر فرض کنیم، در آن صورت تعداد دفعاتی که شمارهٔ شرط بندی شده ظاهر می شودیک متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترها $\left(3, \frac{1}{6}\right)$ است . بنابراین اگر X مقدار برد بازیکن باشد ، داریم

$$
\begin{aligned}
P\{X=-1\} &= \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}\\
P\{X=1\} &= \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}\\
P\{X=2\} &= \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}\\
P\{X=3\} &= \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}
\end{aligned}
\qquad (۳-۴)
$$

برای تعیین عادلانه بودن بازی آن را در درازمدت در نظر می گیریم. از معادلات (۴-۳) نتیجه می شود که اگر بازیکن بازی را بی نهایت بار ادامه دهد، در آن صورت در درازمدت از هر ۲۱۶ بازی مقدار برد او بقرار زیر خواهد بود

۱۲۵ بار مقدار برد او برابر ۱ - (یعنی باخت۱) است

۷۵ بار مقدار برد او برابر ۱ + است

۱۵ بار مقدار برد او برابر ۲ است

۳ بار مقدار برد او برابر ۳ است

پس در دراز مدت از هر ۲۱۶ بازی مقدار برد او عبارت است از

$$-1(125)+1(75)+2(15)+3(1)=-17$$

یعنی بطور متوسط ۱۷ واحد در هر ۲۱۶ بازی خواهد باخت.

از این نظر بازی عادلانه نیست. (گرچه استدلال فوق جنبه تاریخی دارد ولی کاملاً معتبر است و به وسیلهٔ قانون قوی اعداد بزرگ که در فصل ۸ بیان خواهد شد

تأیید می شود) . تعبیر صحیح باخت مبلغ ۱۷ واحد در ۲۱۶ بازی این است که کل مبلغ برد بازیکن در n بازی اول تقسیم بر n ، با احتمال ۱ ، وقتی $n \to \infty$ به $-\frac{۱۷}{۲۱۶}$ همگرا خواهد بود.

در مثال بعد ساده ترین صورت نظریهٔ وراثت که توسط مندل بسط داده شده است بررسی می شود (۱۸۴۴-۱۸۲۲) .

مثال ۴ ت. فرض کنید صفت خاصی (مانند رنگ چشم یا چپ دستی) از یک فرد معین را بر مبنای یک جفت ژن طبقه بندی کنیم و فرض کنید d، ژن غالب و r ، ژن مغلوب باشد. در این صورت فردی با ژنهای dd غالب خالص و فردی با ژنهای rr مغلوب خالص و فردی با ژنهای rd دو رگه نامیده می شود. غالب خالص و دو رگه در ظاهر مشابهند. اطفال از هریک از والدین یک ژن دریافت می کنند. اگر در ارتباط با یک صفت خاص، والدین دو رگه دارای ۴ بچه باشند، احتمال این که ۳ بچه از ۴ بچه ظاهر غالب داشته باشند چقدر است؟

حل : اگر فرض کنیم که هریک از بچه ها با احتمال مساوی هریک از دو ژن را از والدین به ارث می برند، احتمالهای مربوط به اطفال والدین دو رگه که دارای ژنهای dd و rr یا rd هستند به ترتیب عبارت است از $\frac{۱}{۴}$ ، $\frac{۱}{۴}$ ، $\frac{۱}{۲}$.

بنابراین چون یک بچه دارای ظاهر غالب خواهد بود اگر یک جفت ژن او dd یا rd باشد، در نتیجه تعداد این بچه ها دارای توزیع دو جمله ای با پارامترهای $\left(4, \frac{3}{4}\right)$ است. پس احتمال مطلوب برابر است با

$$\binom{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

مثال ۴ ث. هیأتی از داوران را در نظر می گیریم که در آن برای اثبات جرم باید، ۸ داور از ۱۲ داور جرم را تأیید کنند؛ یعنی برای آن که مدافع مجرم شناخته شود باید حداقل ۸ نفر از داوران رأی به مجرم بودن او بدهند. اگر فرض کنیم رأی داوران مستقل از یکدیگر باشد و هریک تصمیم درست را با احتمال θ اختیار کنند، احتمال این که هیأت داوران رأی صحیح بدهند چقدر است؟

حل : مسأله به صورتی که مطرح شده روشن نیست، زیرا اطلاعات کافی برای حل مسأله در دست نیست. مثلاً، اگر مدافع بی گناه باشد، احتمال این که هیأت داوران تصمیم

صحیح بگیرند برابر است با

$$\sum_{i=5}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}$$

حال آن که اگر مقصر باشد، احتمال تصمیم درست برابر است با

$$\sum_{i=8}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}$$

بنابراین اگر α احتمال مقصربودن باشد، با شرطی کردن بر مقصر بودن یا نبودن معلوم می شود که احتمال تصمیم صحیح داوران به صورت زیر است

$$\alpha \sum_{i=8}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i} + (1-\alpha) \sum_{i=5}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}$$

مثال ۴ ج. یک سیستم مخابراتی از n جُزء تشکیل می شود که هریک از آنها بطور مستقل و با احتمال p عمل می کند. کل سیستم وقتی بطور مؤثر فعال خواهد بود که حداقل نصف مؤلفه ها، درست عمل کنند.

(الف) به ازای چه مقادیر p یک سیستم با ۵ مؤلفه بهتر از یک سیستم با ۳ مؤلفه عمل می کند.

(ب) بطور کلی، چه موقع سیستمی با $2k+1$ مؤلفه بهتر از سیستمی دارای $2k-1$ مؤلفه عمل می کند.

حل: (الف) چون تعدادمؤلفه های فعال یک متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای(n, p) است، نتیجه می شود احتمال این که سیستمی با ۵ مؤلفه فعال باشد برابر است با

$$\binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + p^5$$

در صورتی که احتمال فوق برای سیستمی با ۳ مؤلفه برابر است با

$$\binom{3}{2} p^2 (1-p) + p^3.$$

بنابراین، سیستم ۵ مؤلفه ای بهتر است اگر

$$10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 \geq 3p^2(1-p) + p^3$$

که به صورت زیر خلاصه می شود

$$3(p-1)^2(2p-1) \geq 0$$

یا

$$p \geq 1/2.$$

(ب) بطور کلی سیستمی با 2k + 1 مؤلفه بهتر از 2k - 1 مؤلفه عمل می کند اگر (و فقط اگر) $p > \frac{1}{2}$. برای اثبات این مطلب سیستمی را با 2k + 1 مؤلفه در نظر می گیریم و فرض می کنیم X تعداد 2k - 1 مؤلفه اول آن باشد که فعال هستند . در این صورت

$$P_{2k+1}(\text{فعال}) = P\{X \geq k+1\} + P\{X = k\}(1-(1-p)^2) + P\{X = k-1\}p^2$$

زیرا 2k + 1 مؤلفه سیستم فعال هستند اگر

(الف) $X \geq k+1$

(ب) $X = k$ و حداقل یکی از دو مؤلفه باقیمانده عمل کند .

یا

(پ) $X = k-1$ و هردو مؤلفه بعدی عمل کنند

چون

$$P_{2k-1}(\text{فعال}) = P\{X \geq k\} = P\{X = k\} + P\{X \geq k+1\}$$

نتیجه می شود

$$\begin{aligned} P_{2k+1}(\text{فعال}) - P_{2k-1}(\text{فعال}) &= P\{X = k-1\}p^2 - (1-p)^2 P\{X = k\} \\ &= \binom{2k-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^k p^2 - (1-p)^2 \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^{k-1} \\ &= \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^k [p - (1-p)] \quad \text{و} \quad \binom{2k-1}{k-1} = \binom{2k-1}{k} \\ &\geq 0 \Leftrightarrow P \geq \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

حال خواص توابع جرم احتمال یک متغیر دو جمله ای را بررسی می کنیم. بخصوص حکم زیر را ثابت می کنیم

حکم ۴-۱

اگر X یک متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای (n,p) ، $0 < p < 1$ باشد، آن گاه وقتی X از 0 تا n تغییر می کند، $P\{X = k\}$ ابتدا بطور یکنوا صعود می کند و سپس بطور یکنوا نزول خواهد کرد و وقتی به ماکزیمم خود می رسد که k بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $(n+1)p$ باشد.

برهان: حکم را با توجه به مقدار $P\{X = k\} / P\{X = k-1\}$ ثابت می کنیم و معین می کنیم که به ازای چه مقادیر k بزرگتر یا کوچکتر از ۱ خواهد بود.

$$\frac{P\{X = k\}}{P\{X = k-1\}} = \frac{\dfrac{n!}{(n-k)!k!}p^k(1-p)^{n-k}}{\dfrac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$$

بنابر این $P\{X = k\} \geq P\{X = k-1\}$ اگر و فقط اگر

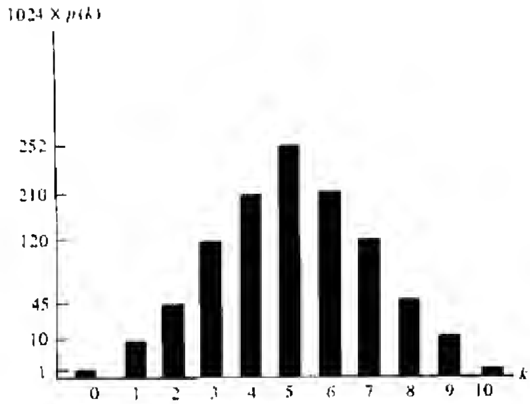
$$(n-k+1)p \geq k(1-p)$$

به عبارت معادل اگر و فقط اگر

$$k \leq (n+1)p$$

به این ترتیب حکم ثابت می شود.

به عنوان توضیح بیشتر حکم ۴-۱ به شکل ۴-۵ توجه کنید. این شکل مربوط به تابع جرم احتمال یک متغیر تصادفی با پارامترهای $\left(10, \frac{1}{2}\right)$ است



شکل ۴-۵ نمودار $p(k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

۴-۱ محاسبهٔ تابع توزیع دو جمله‌ای

فرض کنید X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای (n , p) باشد. کلید محاسبه تابع توزیع

$$P\{X \leq i\} = \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

استفاده از رابطهٔ زیر بین $P\{X = k+1\}$ و $P\{X = k\}$ است، که در اثبات حکم ۴-۱ به دست آمد:

$$P\{X = k+1\} = \frac{p}{1-p}\frac{n-k}{k+1}P\{X = k\} \qquad (۴-۴)$$

مثال ۴ج. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با پارامترهای $n = 6$ و $p = 0.4$ باشد. در این صورت با در نظر گرفتن $P\{X = 0\} = (0.6)^4$ و استفاده مکرر از معادلهٔ ۴-۴ داریم

$$\begin{aligned}
P\{X = 0\} &= (.6)^6 = .0467\\
P\{X = 1\} &= \tfrac{4}{6}\tfrac{6}{1}P\{X = 0\} = .1866\\
P\{X = 2\} &= \tfrac{4}{6}\tfrac{5}{2}P\{X = 1\} = .3110\\
P\{X = 3\} &= \tfrac{4}{6}\tfrac{4}{3}P\{X = 2\} = .2765\\
P\{X = 4\} &= \tfrac{4}{6}\tfrac{3}{4}P\{X = 3\} = .1382\\
P\{X = 5\} &= \tfrac{4}{6}\tfrac{2}{5}P\{X = 4\} = .0369\\
P\{X = 6\} &= \tfrac{4}{6}\tfrac{1}{6}P\{X = 5\} = .0041.
\end{aligned}$$

یک برنامه کامپیوتری به زبان بیسیک که از معادلهٔ برگشتی (۴ – ۴) برای محاسبه تابع توزیع دوجمله ای استفاده می کند در آخر این فصل داده شده است. این برنامه ابتدا $P\{X = 0\} = (1 - p)^n$ را محاسبه می کند و سپس معادلهٔ ۴-۴ را متوالیاً برای محاسبه $P\{X = 0\}=(1 - p)^n$ به کار می برد. ولی این روش فقط برای مقادیر متوسط n مناسب است، زیرا درحالتی که n بزرگ است به خاطر گردشدن اعداد به وسیلهٔ کامپیوتر، $P\{X = 0\} =(1 -p)^n$ برابر صفر به دست می آید. در این صورت تمام جملات بعدی $P\{X = k\}$ ، $k = 1,\ldots i$ نیز برابر صفر خواهد شد.

برای جلوگیری از این عمل برنامهٔ کامپیوتر طوری نوشته می شود که به جای $P\{X = 0)$ مقدار $P\{X = j\}$ را محاسبه کند که در آن

$$J = \begin{cases} i & i \leq (n+1)p \\ [(n+1)p] & i > (n+1)p \end{cases}$$

که در آن [x] که در برنامه Int (x) نامیده می‌شود، عبارت از بزرگترین جزء صحیح x است. (از تمام احتمالهای $P\{X = k\}$ ، $k = 0,1,\ldots i$ که باید محاسبه شوند، $P\{X = j\}$ بزرگترین آنهاست). سپس برنامه بطور برگشتی مقادیر $P\{X = j - 1\}$ ، $P\{X = j - 2\}$ ، . . . ، $P\{X = 0\}$ را محاسبه می کند. به علاوه اگر $j < i$ مقادیر $P\{X = j + 1\}$ ، . . . ، $P\{X = i\}$ نیز محاسبه می‌شود.

برای محاسبهٔ

$$P\{X = J\} = \binom{n}{J} p^J(1-p)^{n-J}$$
$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-J+1)}{J(J-1)\cdots 1} p^J(1-p)^{n-J}$$

ابتدا از طرفین لگاریتم می گیریم

$$\log P\{X = J\} = \sum_{k=1}^{J} \log(n+1-k)$$
$$- \sum_{k=1}^{J} \log(k) + J\log p + (n-J)\log(1-p)$$

و سپس می نویسیم

$$P\{X = J\} = \exp\{\log P\{X = J\}\}$$

مثال ۴ ع.(الف) اگر X دارای توزیع دو جمله ای با پارامترهای (۰٫۵ و ۲۵۰) باشد مقدار $P\{X \le 145\}$ را محاسبه کنید.

(ب) اگر X دارای توزیع دو جمله ای با پارامترهای (۰٫۱ و ۱۰۰۰) باشد مقدار $P\{X \le 90\}$ را محاسبه کنید.

حل : از برنامه کامپیوتری زیر برای توزیع دو جمله ای استفاده کنید:

```
RUN
THE DISTRIBUTION FUNCTION OF A BINOMIAL(n,p) RANDOM VARIABLE
ENTER n
? 250
ENTER p
? .5
ENTER i
? 145
THE PROBABILITY IS .995255
Ok

RUN
THE DISTRIBUTION FUNCTION OF A BINOMIAL(n,p) RANDOM VARIABLE
ENTER n
? 1000
ENTER p
? .1
ENTER i
? 90
THE PROBABILITY IS .1582189
Ok
```

۵ – متغیر تصادفی پواسن

متغیر تصادفی X با مقادیر 0، 1، 2، . . . را یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ گوییم اگر برای $\lambda > 0$ داشته باشیم

$$p(i) = P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{۱-۵}$$

معادلهٔ (۵-۱) یک تابع جرم احتمال است، زیرا

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

توزیع احتمال پواسن توسط پواسن در یکی از کتابهایش در مبحث احتمال (۱۸۳۷) معرفی شده است.

متغیر تصادفی پواسن در زمینه های مختلف کاربرد زیادی دارد زیرا آن را می توان به عنوان تقریب متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای (n , p) وقتی n بزرگ و p کوچک است

به قسمی که np مقدار متوسطی را اختیار می کند در نظر گرفت. برای ملاحظهٔ این مطلب، فرض کنید X یک متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای (n , p) باشد و λ = np . در این صورت

$$P\{X = i\} = \frac{n!}{(n-i)!\,i!}p^i(1-p)^{n-i}$$
$$= \frac{n!}{(n-i)!\,i!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$
$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i}\,\frac{\lambda^i}{i!}\,\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^i}$$

حال برای n بزرگ و مقدار متوسط λ می توان نوشت

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda} \qquad \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i} \approx 1 \qquad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1$$

پس در این صورت داریم

$$P\{X = i\} \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

به عبارت دیگر، اگر n آزمایش مستقل با احتمال موفقیت p انجام شود، وقتی n بزرگ و p به قدری کوچک باشد که np مقدار متوسطی را اختیار کند آن گاه، تعداد موفقیتهای حاصل تقریباً یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ = np است. این مقدار (که معلوم می شود برابر میانگین تعداد موفقیتهاست) بطور تجربی به دست می آید.

چند مثال از متغیرهای تصادفی که معمولاً از قانون احتمال پواسن [یعنی از معادلهٔ (۵-۱)] تبعیت می کند به قرار زیر است:

۱ - تعداد غلطهای چاپی در یک صفحه (یا در تعدادی از صفحات) کتاب.

۲ - تعداد افراد یک فرقه که ۱۰۰ سال عمر می کنند.

۳ - تعداد تلفنهای اشتباه که در یک روز انجام می شود.

۴ - تعداد بسته های فلفل که در یک فروشگاه معین در روز فروخته می شود.

۵ - تعداد مشتریان ادارهٔ پست در یک روز معین.

۶ - تعداد پستهای خالی در یک دادگاه عالی در طول یکسال.

۷ - تعداد ذرات α در یک دوره ثابت که از یک جسم رادیو اکتیو منتشر می شود.

هریک از مثالهای فوق، و متغیرهای تصادفی دیگر، به همین دلیل دارای توزیع پواسن هستند ـ یعنی، به علت تقریب پواسن با دو جمله ای . مثلاً ، می توان فرض کرد که هر حرف از یک صفحه با احتمال p اشتباه تایپ می شود. بنابراین تعداد اشتباهات در یک صفحه تقریباً دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda = np$ است که در آن n تعداد حروف یک صفحه است. همین طور، می توان فرض کرد که هر فرد در یک فرقه با احتمال معینی به سن ۱۰۰ سالگی می رسد. همچنین، هرشخص که به یک عطاری وارد می شود می توان فرض کرد که با احتمال معینی یک بسته فلفل می خرد و الی آخر.

مثال ۵ الف. فرض کنید تعداد اشتباهات تایپی در یک صفحه این کتاب دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ است. احتمال حداقل یک اشتباه در این صفحه کتاب چقدر است؟

حل : فرض کنید X تعداد اشتباهات در این صفحه باشد، داریم

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - e^{-1/2} \approx .395$$

مثال ۵ ب. فرض کنید کالای تولید شده به وسیلهٔ یک ماشین با احتمال ۰/۱ معیوب است. مطلوب است احتمال آن که در یک نمونه ۱۰ تایی حداکثر یک کالای معیوب باشد.

حل : احتمال مطلوب برابر است با

$$\binom{10}{0}(.1)^0(.9)^{10} + \binom{10}{1}(.1)^1(.9)^9 = 7361$$

در صورتی که با تقریب پواسن داریم $e^{-1} + e^{-1} \approx .7358$.

مثال ۵ پ. آزمایش مربوط به شمردن ذرات α را در مدت یک ثانیه از یک گرم جسم رادیو اکتیو در نظر بگیرید. اگر از قبل بدانیم که بطور متوسط ۳/۲ ذره صادر می شود یک تقریب خوب برای احتمال این که بیش از ۲ ذره α صادر نشود پیدا کنید.

حل : اگر یک گرم جسم رادیو اکتیو را متشکل از n اتم در نظر بگیریم که هریک با احتمال $\lambda = \frac{3.2}{n}$ تجزیه شده و ذرات α در طول یک ثانیه مورد مطالعه صادر می کند آن گاه با یک تقریب خوب تعداد α های صادر شده یک متغیر پواسن ، پارامتر $\lambda = 3.2$ است . پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$P\{X \le 2\} = e^{-3.2} + 3.2e^{-3.2} + \frac{(3.2)^2}{2}e^{-3.2}$$
$$\approx .382$$

نشان داده‌ایم که توزیع پواسن با پارامتر np به شرط آن که n بزرگ و p کوچک باشد، یک تقریب بسیار خوب برای توزیع تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل است به قسمی که احتمال موفقیت هریک از آزمایشها p باشد، در واقع، این تقریب خوب است حتی اگر آزمایشها مستقل هم نباشند، به شرط آن که این وابستگی «ضعیف» باشد. مثلاً، مسأله جور بودن (مثال ۵خ در فصل ۲) را به خاطر بیاورید که در آن n مرد بتصادف کلاهی از مجموعه کلاههای خود انتخاب می کنند. انتخاب تصادفی هر کلاه را می توان مانند نتیجه یکی از n آزمایش در نظر گرفت که در آن آزمایش i یک موفقیت است اگر فرد i کلاه خود را انتخاب کند، $i = 1, \ldots n$. پیشامد E_i، $i = 1, \ldots, n$، را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$E_i = \{\text{آزمایش } i \text{ ام موفقیت است}\}$$

در این صورت بآسانی دیده می شود که

$$P\{E_i\} = 1/n \qquad \text{و} \qquad P\{E_i \mid E_j\} = 1/(n-1),\ j \neq i$$

پس اگر E_i ها، $i = 1, \ldots, n$، مستقل نباشند وابستگی آنها برای مقادیر بزرگ n بسیار ضعیف خواهد بود. به این دلیل معقول به نظر می رسد که انتظار داشته باشیم که تعداد موفقیتها تقریباً دارای توزیع پواسن با پارامتر $n(1/n) = 1$ است، و درواقع این مطلب درمثال ۵خ فصل ۲ ثابت شد.

برای روشن شدن مطلب و این که تقریب پواسن وقتی وابستگی ضعیف است مناسب می باشد مجدداً مثال روز تولد ـ مثال ۵چ در فصل ۲ ـ را در نظر می گیریم. در این مثال فرض می کنیم هر یک از n فرد با احتمال مساوی می تواند در هریک از ۳۶۵ روز سال متولد شده باشد و مسأله عبارت است از تعیین احتمال این که مجموعه ای از n فرد مستقل دارای روزهای تولد مختلف باشند. با استفاده از آنالیز ترکیبی به ازای $n = 23$ این احتمال کمتر از $\frac{1}{2}$ است.

مسأله فوق را می توان با استفاده از تقریب پواسن به صورت زیر حل کرد. فرض کنید برای هریک از $\binom{n}{2}$ زوج مربوط به افراد i و j، $i \neq j$ یک آزمایش داریم و آزمایش $i-j$ را

موفقیت گوییم اگر فرد i و j در یک روز متولد شده باشند. اگر E_{ij} این پیشامد باشد که آزمایش i - j یک موفقیت است آن گاه با وجود این که $\binom{n}{2}$ پیشامد E_{ij}، $1 \leq i < j \leq n$ مستقل نیستند (تمرین نظری ۱۴) این همبستگی به نظر ضعیف است. (در واقع این پیشامدها «دو به دو مستقل هستند» یعنی هر دو پیشامد E_{ij} و E_{kl} مستقل هستند ـ مجدداً تمرین ۱۴ را ملاحظه کنید). چون $P(E_{ij}) = \frac{1}{365}$ بی مناسبت نیست که فرض کنیم تعداد موفقیتها تقریباً دارای توزیع پواسن با پارامتر زیر است

$$\binom{n}{2}/365 = n(n-1)/730.$$

بنابراین

$$P\{\text{صفر موفقیت}\} = P\{\text{هیچ دو نفری در یک روز متولد نشده باشند}\}$$
$$\approx \exp\{-n(n-1)/730\}$$

برای تعیین کوچکترین مقدار n که به ازای آن این احتمال کمتر از $\frac{1}{2}$ باشد توجه کنید که

$$\exp\{-n(n-1)/730\} \leq \tfrac{1}{2}$$

به عبارت دیگر

$$\exp\{n(n-1)/730\} \geq 2$$

اگر از طرفین لگاریتم بگیریم داریم

$$\begin{aligned} n(n-1) &\geq 730 \log 2 \\ &\approx 505.997 \end{aligned}$$

که دارای جواب $n = 23$ است، که با نتیجهٔ مثال ۵ خ تطابق دارد.

حال فرض کنید بخواهیم میان n فرد، هیچ سه نفری دارای یک تاریخ تولد یکسان نباشند. هرچند این نیز یک مسأله مشکل ترکیب است، یک تقریب خوب از آن می توان به دست آورد. فرض کنید که برای هریک از $\binom{n}{3}$ سه تایی i، j، k که در آن $1 \leq i < j < k \leq n$ یک آزمایش وجود داشته باشد و آزمایش i - j - k را موفقیت گوییم اگر افراد i و j و k همه تاریخ تولد یکسان داشته باشند. مانند فوق نتیجه می شود که تعداد موفقیتها تقریباً یک متغیر تصادفی است با پارامتر

$$\binom{n}{3} P\{i, j, k \text{ با تاریخ تولید یکسان}\} = \binom{n}{3}\left(\frac{1}{365}\right)^2$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6 \times (365)^2}$$

بنابر این

$$P(\text{تاریخ تولد هیچ سه نفری یکسان نباشد}) \approx \exp\{-n(n-1)(n-2)/799350\}$$

این احتمال وقتی n در نا مساوی زیر صدق کند کمتر از $\frac{1}{2}$ خواهد بود

$$n(n-1)(n-2) \geq 799350\log 2 \approx 554067.1$$

که معادل با $n \geq 84$. پس احتمال این که حداقل ۳ فرد در یک گروه ۸۴ نفری یا بزرگتر دارای تاریخ تولد یکسان باشند بیشتر از $\frac{1}{2}$ است.

یک کاربرد دیگر توزیع احتمال پواسن وقتی است که «پیشامدها» در لحظاتی از زمان اتفاق افتند. مثلاً وقتی پیشامد، وقوع یک زمین لرزه باشد، یا پیشامد، ورود به یک سازمان خاص (بانک، ادارهٔ پست، پمپ بنزین و . . .) باشد؛ یک امکان دیگر پیشامد وقوع یک جنگ است. فرض کنید پیشامدها در لحظات (تصادفی) معینی از زمان رخ دهند، و برای مقدار ثابت λ فرضهای زیر برقرار باشند:

۱ - احتمال این که درست یک پیشامد در فاصله ای به طول h رخ دهد برابر $\lambda h + o(h)$ باشد که در آن $o(h)$ تابعی است مانند $f(h)$ به قسمی که $\lim_{h \to \infty} \frac{f(h)}{h} \to 0$. [مثلاً $f(h) = h^2$ برابر $o(h)$ است در صورتی که $f(h) = b$ چنین نیست.]

۲ - احتمال این که دو پیشامد یا بیشتر در فاصله ای به طول h رخ دهد برابر $o(h)$ است.

۳ - برای هر عدد صحیح n ، j_1 ، j_2 ، ... ، j_n و هر مجموعه از n بازهٔ جدا از هم ، اگر E_i پیشامد وقوع دقیقاً j_i پیشامد مورد نظر در فاصلهٔ i ام باشد، آن گاه $E_1, E_2, \ldots E_n$ مستقل هستند.

به عبارت ساده تر، (۱) و (۲) بیان می کنند که برای مقادیر کوچک h احتمال این که درست یک پیشامد در بازه ای به طول h رخ دهد برابر است با λh به اضافه مقداری که در مقایسه با h کوچک است ، درصورتی که احتمال وقوع دو پیشامد یا بیشتر در مقایسه با h کوچک است. فرض (۳) بیان می کند که هرچه در یک فاصله رخ دهد اثری در رویدادهای فواصل دیگر

نخواهد داشت.

تحت فرضهای ۱، ۲، ۳ نشان خواهیم داد که تعداد پیشامدهایی که در فاصله به طول t رخ می دهد یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λt است. به عبارت دقیقتر فرض کنید فاصلهٔ مورد نظر $[0,\ t]$ و تعداد پیشامدهایی که در آن رخ می دهند $N(t)$ باشد. برای یافتن مقدار $P\{N(t)=k\}$ ابتدا فاصله $[0, t]$ را به n زیر فاصله جدا از هم به طول $\frac{t}{n}$ افراز می کنیم

(شکل ۴-۶)

از طرفی

$$P\{N(t)=k\} = P\{\text{تعداد k زیر فاصله شامل یک پیشامد و } n-k \text{ فاصله شامل 0 پیشامد}\}$$
$$+ P\{N(t)=k \text{ و حداقل یک زیر فاصله شامل ۲ پیشامد یا بیشتر}\} \qquad (۵-۲)$$

زیرا پیشامد سمت چپ معادله (۵ - ۲) یعنی $\{N(t)=k\}$ با اجتماع دو پیشامد جدای سمت راست معادله برابر است. اگر این دو پیشامد را A و B بنامیم داریم

$$\begin{aligned}
P(B) &\le P\{\text{حداقل یک زیرفاصله شامل دو پیشامد یا بیشتر}\} \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{\text{زیرفاصلهٔ i ام شامل دو پیشامد یا بیشتر باشد}\}\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{n} P\{\text{زیرفاصلهٔ i ام شامل دو پیشامد یا بیشتر باشد}\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} o\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= n o\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= t\left[\frac{o(t/n)}{t/n}\right]
\end{aligned}$$

از طرفی به ازای هر t، وقتی $n \to \infty$ ، $\frac{t}{n} \to 0$ و در نتیجه بنا به تعریف $o(h)$ اگر $n \to \infty$ ، آن گاه

پس وقتی $n \to \infty$ ،

$$P(B) \to 0 \text{ as } n \to \infty \tag{۵-۳}$$

از طرف دیگر چون از فرض ۱ و ۲ نتیجه می شود

$$P\{\text{پیشامد } 0 \text{ در یک فاصله به طول } h \text{ رخ دهد}\} = 1 - [\lambda h + o(h) + o(h)] = 1 - \lambda h - o(h)'$$

با توجه به فرض استقلال (۳) معلوم می شود که

$$P(A) = P\{\text{زیر فاصله شامل یک پیشامد و } n-k \text{ فاصله شامل } 0 \text{ پیشامد } k\}$$

$$= \binom{n}{k}\left[\frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^k \left[1 - \left(\frac{\lambda t}{n}\right) - o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^{n-k}$$

با وجود این چون

$$n\left[\frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right] = \lambda t + t\left[\frac{o(t/n)}{t/n}\right] \to \lambda t \text{ و } n \to \infty$$

مانند استدلالی که برای تقریب دو جمله ای با پواسن داشتیم می توان نوشت

$$P(A) \to e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad \text{و } n \to \infty \tag{۵-۴}$$

پس $n \to \infty$ از معادلات (۵ - ۲)، (۵-۳) و (۵-۴) نتیجه می شود

$$P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{۵-۵}$$

بنابراین، اگر فرضهای (۱)، (۲)و(۳) برقرار باشند تعداد پیشامدهای رخ داده در فاصله ای به طول t ، یک متغیر پواسن با پارامتر λt است، و می گوییم که پیشامدها طبق فرآیند پواسن با نرخ λ رخ می دهند. مقدار λ که همان نرخ در واحد زمان است مقداری است ثابت که باید بطور تجربی به دست آید.

بحث فوق نشان می دهد که چرا یک متغیر تصادفی پواسن یک تقریب خوب برای پدیده های گوناگونی به صورت زیر است:

۱ - تعداد زمین لرزه ها در یک فاصله زمانی ثابت.

۲- تعداد جنگها در سال

۳- تعداد الکترونهای آزادشده ، از کاتد در یک فاصله زمانی ثابت.

۴- تعداد مرگ و میر بیمه گذاران یک شرکت بیمه عمر در یک فاصله زمانی مفروض.

مثال ۵ ت. فرض کنید زمین لرزه ها در شرق ایالات متحده تحت شرایط ۱ ، ۲و ۳ با $\lambda = 2$ و یک هفته به عنوان واحد زمان رخ می دهند (یعنی زمین لرزه ها طبق سه فرض با نرخ ۲ تا در هفته رخ می دهند) :

(۱) احتمال این که حداقل ۳ زمین لرزه در طول ۲ هفتهٔ آینده رخ دهد چقدر است؟

(۲) توزیع احتمال زمان را از حالا تا زمین لرزهٔ بعد پیدا کنید.

حل : ۱- از معادلهٔ (۵ - ۵) داریم

$$
\begin{aligned}
P\{N(2) \geq 3\} &= 1 - P\{N(2) = 0\} - P\{N(2) = 1\} - P\{N(2) = 2\} \\
&= 1 - e^{-4} - 4e^{-4} - \frac{4^2}{2}e^{-4} \\
&= 1 - 13e^{-4}
\end{aligned}
$$

۲- فرض کنید X زمان لازم (برحسب هفته) تا زمین لرزهٔ بعدی باشد. چون X بزرگتر از t خواهد بود اگر و فقط اگر هیچ پیشامدی در t واحد زمان بعدی رخ ندهد، از معادلهٔ (۵ -۵) نتیجه می شود که

$$P\{X > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

و بنابراین تابع توزیع احتمال F متغیر تصادفی X به صورت زیر است

$$
\begin{aligned}
F(t) = P\{X \leq t\} = 1 - P\{X > t\} &= 1 - e^{-\lambda t} \\
&= 1 - e^{-2t}
\end{aligned}
$$

۵-۱ محاسبه تابع توزیع پواسن

اگر X یک متغیر پواسن با پارامتر λ باشد، آن گاه

$$\frac{P\{X = i + 1\}}{P\{X = i\}} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+1}/(i+1)!}{e^{-\lambda}\lambda^i/i!} = \frac{\lambda}{i+1} \qquad (۵-۶)$$

اگر با $P\{X = 0\} = e^{-\lambda}$ شروع کنیم می توان با استفاده از (۵-۶) مقادیر زیر را محاسبه کرد

$$P\{X = 1\} = \lambda P\{X = 0\}$$
$$P\{X = 2\} = \frac{\lambda}{2} P\{X = 1\}$$
$$\vdots$$
$$P\{X = i + 1\} = \frac{\lambda}{i + 1} P\{X = i\}.$$

یک برنامه بیسیک که معادلهٔ ۵-۶ را برای محاسبه تابع توزیع پواسن به کار می برد درآخر این فصل ارائه شده است. در این برنامه محاسبه با $P\{X = 0\} = e^{-\lambda}$ شروع می شود. ولی، برای حالتی که λ بزرگ است، کامپیوتر مقدار $e^{-\lambda}$ را برابر 0 به دست می آورد، و برنامه با $P(X = j)$ شروع می شود که در آن

$$J = \begin{cases} i & i \le \lambda \\ \text{Int}(\lambda) & i > \lambda \end{cases}$$

و $\text{Int}(\lambda)$ بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی λ است. دلیل این انتخاب این است که از تمام مقادیر $P\{X = k\}$ ، $k = 0, 1, \ldots i$ که باید محاسبه شود بزرگترین آنها $P\{X = j\}$ است (تمرین نظری ۱۱ را ملاحظه کنید). این برنامه مقدار $P\{X = j\}$ را به کمک محاسبهٔ

$$\log P\{X = J\} = -\lambda + J\log(\lambda) - \sum_{k=1}^{J} \log k$$

و سپس نوشتن $P\{X = j\} = \exp[\log\{X = j\}]$ به دست می آورد.

پس از محاسبه $P\{X = j\}$ ، برنامه با استفاده از (۵-۶) بطور بازگشتی مقادیر $P(X = j - 1)$، $P\{X = j - 2\}$ ، $P\{X = j - 2\}$، . . . ، $P\{X = 0\}$ را محاسبه کند. اگر $j < i$ ، برنامه مجدداً (۵-۶) را به کار می برد تا بطور بازگشتی مقادیر $P\{X = j + 1\}$ ، . . . $P\{X = i\}$ را محاسبه کند. از جمع تمام این مقادیر بازگشتی $P(X \le i)$ به دست می آید.

مثال ۵ ث.

(الف) مقدار $P\{X \le 100\}$ را وقتی X دارای توزیع پواسن با میانگین ۹۰ است محاسبه کنید.

(ب) مقدار $P(X<1075)$ را وقتی X دارای توزیع پواسن با میانگین ۱۰۰۰ است حساب کنید.

حل : برنامه توزیع پواسن را اجرا می کنیم

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A POISSON RANDOM VARIABLE
IS LESS THAN OR EQUAL TO i
ENTER THE MEAN OF THE RANDOM VARIABLE
? 100
ENTER THE DESIRED VALUE OF i
? 90
THE PROBABILITY THAT A POISSON RANDOM VARIABLE WITH MEAN  100
IS LESS THAN OR EQUAL TO 90 IS .1713914
Ok
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A POISSON RANDOM VARIABLE
IS LESS THAN OR EQUAL TO i
ENTER THE MEAN OF THE RANDOM VARIABLE
? 1000
ENTER THE DESIRED VALUE OF i
? 1075
THE PROBABILITY THAT A POISSON RANDOM VARIABLE WITH MEAN  1000
IS LESS THAN OR EQUAL TO 1075 IS .989354
Ok
```

۶ - سایر توزیعهای احتمال گسسته

۶-۱ متغیر تصادفی هندسی

فرض کنید آزمایشهای مستقلی با احتمال موفقیت p ، $0 < p < 1$ ، آن قدر تکرار می شود تا یک موفقیت به دست آید. اگر X تعداد آزمایشهای لازم باشد، آن گاه

$$P\{X = n\} = (1-p)^{n-1}p \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{۶-۱}$$

برای به دست آوردن معادلهٔ (۶-۱) می دانیم شرط لازم و کافی برای $X = n$ آن است که ابتدا، $n - 1$ آزمایش شکست و n امین آزمایش موفقیت باشد. معادله (۶-۱) به این شکل به دست می آید زیرا برآمدهای متوالی آزمایشها بنا به فرض مستقل هستند.

چون

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X = n\} = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

در نتیجه با احتمال ۱ یک موفقیت بالاخره اتفاق می افتد. هر متغیر تصادفی X که تابع جرم احتمال آن از معادلهٔ (۶-۱) به دست می آید یک متغیر تصادفی **هندسی** (پاسکال) با پارامتر p نامیده می شود.

مثال ۶ الف. جعبه ای دارای N مهره سفید و M مهرهٔ سیاه است. مهره ها یکی بعد از

دیگری بطور تصادفی انتخاب می شود تا یک مهره سیاه خارج شود. اگر فرض کنیم که هر انتخاب قبل از انتخاب بعدی جایگذاری می شود، مطلوب است احتمال آن که
(۱) دقیقاً n استخراج لازم باشد و (۲) حداقل k استخراج لازم باشد؟

حل : اگر X تعداد مهره های خارج شدهٔ لازم برای به دست آوردن یک مهرهٔ سیاه باشد، در این صورت X در معادلهٔ (۶-۱) با پارامتر $p = \dfrac{M}{M + N}$ صدق می کند. بنابراین

$$1. \qquad P\{X = n\} = \left(\frac{N}{M + N}\right)^{n-1} \frac{M}{M + N} = \frac{MN^{n-1}}{(M + N)^n}$$

$$\begin{aligned} 2. \qquad P\{X \geq k\} &= \frac{M}{M + N} \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{N}{M + N}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{M}{M + N}\right)\left(\frac{N}{M + N}\right)^{k-1} \Big/ \left[1 - \frac{N}{M + N}\right] \\ &= \left(\frac{N}{M + N}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

البته (۲) را می توانیم مستقیماً به دست آوریم، زیرا احتمال این که حداقل k آزمایش برای به دست آوردن یک موفقیت لازم باشد برابر است با احتمال این که اولین $k - 1$ آزمایش همه شکست باشند. یعنی برای یک متغیر تصادفی هندسی

$$P\{X \geq k\} = (1 - p)^{k-1}$$

۶-۲ متغیر تصادفی دوجمله ای منفی

فرض کنید آزمایشهای مستقل با احتمال موفقیت p ، $0 < p < 1$ آن قدر تکرار می شود تا r موفقیت به دست آید. اگر X تعداد آزمایشهای لازم باشد، آن گاه

$$P\{X = n\} = \binom{n - 1}{r - 1} p^r (1 - p)^{n-r} \qquad n = r, r + 1, \ldots \tag{۶-۲}$$

معادلهٔ (۶-۲) این طور حاصل می شود که برای به دست آوردن r موفقیت در n امین آزمایش باید $r - 1$ موفقیت در $n - 1$ آزمایش اولیه به دست آید، و n امین آزمایش باید یک موفقیت باشد. احتمال اولین پیشامد برابر است با

$$\binom{n - 1}{r - 1} p^{r-1} (1 - p)^{n-r}$$

و احتـمـال پیشـامـد دوم برابر p است، پس با تـوجه به استـقـلال، معـادلهٔ (۶-۲) به دست می آید. برای تحقیق این که بالاخره r موفقیت باید رخ دهد می توان بطور تحلیلی ثابت کرد که

$$\sum_{n=r}^{\infty} P\{X = n\} = \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} = 1 \tag{۳-۶}$$

یا بطور احتمالی استدلال کرد: تعداد آزمایشهای لازم برای به دست آوردن r موفقیت را می توان به صـورت $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_3$ نوشت کـه در آن Y_1 تعـداد آزمـایشـهـای لازم برای اولین موفقیت، Y_2 تعـداد آزمایشـهـای دیگر لازم برای به دست آوردن دومین مـوفقیت و Y_3 تعداد آزمایشهای دیگر لازم تا به دست آوردن سـومین موفـقیت، و الی آخر می باشد. چون آزمایشـها مستقل و همه دارای احتمال موفقیت یکسان هستند نتیجه می شود که Y_1 ، Y_2 ، . . . ، Y_r، همه متغیرهای تصادفی هندسی و بنابراین هر یک با احتمال ۱ متناهی هستند و در نتیجه $\sum_{i=1}^{r} Y_i$ نیز باید متناهی باشد، و به این ترتیب معادلهٔ (۶-۳) ثابت می شود.

متغیر تصادفی X که تابع جرم احتـمـال آن با معادلهٔ (۶-۲) داده می شود یک متغیر تصادفی **دو جمله‌ای منفی** با پارامترهای (r , x) نامیده می شود. توجه کنید که متغیر تصادفی هندسی یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی با پارامتر (1, p) است.

در مثال بعد با استفاده از دو جمله ای منفی یک حل دیگر برای مسأله نقاط پیدا می کنیم.

مثال ۶ ب. اگر آزمایشهای مستقل با احتمال موفقیت p انجام شود، احتمال این که r موفقیت قبل از m شکست به دست آید چقدر است؟

حل: توجه کنید که r موفقیت قبل از m شکست رخ می دهد اگر و فقط اگر موفقیت r ام قبل از r + m - 1 آزمایش به دست آید. زیرا اگر r موفقیت قبل از یا در آزمایش r + m - 1 رخ دهد، در آن صورت باید قبل از شکست m ام رخ دهد و به عکس. بنابراین از معادله (۶-۲) نتیجهٔ می شود که احتمال مطلوب برابر است با

$$\sum_{n=r}^{r+m-1} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

مثال ۶ پ. مسأله قوطی کبریت باناخ. یک ریاضیدان که پیپ می کشد همیشه دو قوطی کبریت دارد، یکی در جیب چپ و یکی در جیب راست. هر بار که به کبریت نیاز داشته باشد با

احتمال مساوی هریک از آنها را اختیار می کند؛ فرض کنید ریاضیدان می داند که یکی از جعبه ها خالی است. اگر فرض کنیم که در ابتدا هر دو جعبه کبریت شامل N سیخ کبریت است، احتمال آن که در جعبهٔ دیگر k کبریت $k = 0, 1, \ldots, N$ وجود داشته باشد چقدر است؟

حل : فرض کنید E پیشامدی باشد که ریاضیدان متوجه شده است که قوطی کبریت جیب راست خالی است و k سیخ کبریت در قوطی جیب چپ وجود دارد. حال این پیشامد رخ می دهد اگر و فقط اگر انتخاب $(N + 1)$ ام از قوطی سمت راست در آزمایش $N + 1 + N - k$ صورت گیرد. پس ازمعادلهٔ (۶-۲) دیده می شود (با $p = 1/2$ ، $r = N + 1$ ، $n = 2N - K + 1$)،

$$P(E) = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k+1}$$

چون احتمال این که ابتدا کبریت راست یا چپ خالی شود برابر است و k کبریت در جعبه سمت راست وجود دارد مقدار مطلوب عبارت است از

$$2P(E) = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}$$

۶-۴ متغیر تصادفی فوق هندسی

فرض کنید نمونه ای به حجم n از جعبه ای که دارای N مهره است که Np مهرهٔ آن سفید و $N - Np$ مهرهٔ آن سیاه است بتصادف (و بدون جایگذاری) خارج می کنیم. اگر X تعداد مهره های سفید انتخاب شده باشد آن گاه

$$P\{X = k\} = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad k = 0, 1, \ldots, \min(n, Np) \tag{۶-۴}$$

هر متغیر تصادفی X با تابع جرم احتمال (۶-۴) را **متغیر تصادفی هندسی** گویند.

مثال ۶ ت. تعداد نامعینی از حیوانات مثلاً N تا در ناحیه ای زندگی می کنند. برای به دست آوردن اطلاعاتی در بارهٔ حجم جامعه ، دانشمندان محیط زیست اغلب آزمایش زیر را انجام می دهند : ابتدا تعدادی از آنها مثلاً r تا را می گیرند، آنها را علامت گذاری کرده و رها می کنند. پس از مدتی که حیوانات علامت دار در کل ناحیه پخش شدند، یک نمونهٔ جدید

به حجم n از آنها گرفته می شود. فرض کنید X تعداد حیوانات علامت دار در نمونه دوم باشد. اگر فرض کنیدکه جمعیت حیوانات در این ناحیه در زمان بین دو نمونه گیری ثابت بماند و احتمال گرفتن هریک از حیوانات یکسان باشد، نتیجه می شود که X دارای یک توزیع فوق هندسی است به قسمی که

$$P\{X=i\}=\frac{\binom{r}{i}\binom{N-r}{n-i}}{\binom{N}{n}}\equiv P_i(N)$$

فرض کنید X برابر i باشد. در این صورت چون $P_i(N)$ احتمال این پیشامد است اگر در ناحیه N حیوان باشد، معلوم می شود که یک برآورد معقول برای N مقداری از N است که تابع $P_i(N)$ را ماکزیمم کند. این برآورد را برآورد **درست نمایی ماکزیمم گویند.** (تمرینهای نظری ۸ و ۱۲ را برای مثالهای مشابه ملاحظه کنید.)

ماکزیمم $P_i(N)$ را می توان با توجه به عبارت زیر به دست آورد

$$\frac{P_i(N)}{P_i(N-1)}=\frac{(N-r)(N-n)}{N(N-r-n+i)}$$

که این نسبت بزرگتر از ۱ است اگر و فقط اگر

$$(N-r)(N-n)\geq N(N-r-n+i)$$

یا به عبارت دیگر، اگر و فقط اگر

$$N\leq\frac{rn}{i}$$

پس $P_i(N)$ ابتدا صعود می کند و سپس نزول می کند و در بزرگترین عدد صحیحی که از $\frac{rn}{i}$ بیشتر نباشد به ماکزیمم خود می رسد. این مقدار همان برآورد درست نمایی ماکزیمم N خواهد بود. برای مثال فرض کنید در نمونهٔ اول $r=۵۰$ حیوان علامت گذاری شده است، اگر در نمونه دوم $n=۴۰$ حیوان گرفته شده باشد و بین آنها $i=۴$ حیوان علامت داشته باشد، مقدار برآورد N برابر ۵۰۰ حیوان خواهد بود. (باید توجه داشت که برآورد فوق را با فرض این که نسبت حیوانات علامت دار در جمعیت، یعنی $\frac{r}{N}$، تقریباً برابر است با نسبت حیوانات علامت دار نمونه، یعنی $\frac{i}{n}$، می توان به دست آورد).

مثال ۶ ث. یک مشتری قطعات الکتریکی را به صورت بسته های ۱۰ تایی خریداری

می کند. شیوهٔ کار او این است که ۳ قطعه از هر بسته را بتصادف انتخاب می کند و آن را می پذیرد فقط اگر هر سه سالم باشند. اگر ۳۰ درصد بسته ها دارای ۴ معیوب و، ۷۰ درصد آنها دارای یک معیوب باشد، خریدار چه نسبتی از بسته ها را رد می کند.

حل: فرض کنید A پیشامد پذیرفتن یک بسته باشد. در این صورت

$$P(A) = P(A \mid \text{بسته دارای ۴ معیوب است})\frac{3}{10} + P(A \mid \text{بسته دارای ۱ معیوب است})\frac{۷}{۱۰}$$

$$= \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}\left(\frac{3}{10}\right) + \frac{\binom{1}{0}\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}}\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{54}{100}$$

بنابراین ۴۶ درصد بسته ها رد می شوند.

۴-۶ توزیع زتا (زیپ)

یک متغیرتصادفی را دارای توزیع زتا گوییم اگرتابع جرم احتمال آن به صورت زیر باشد

$$P\{X = k\} = \frac{C}{k^{\alpha+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

چون مجموع احتمالهای فوق باید برابر ۱ باشد، داریم

$$C = \left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha+1}\right]^{-1}$$

توزیع زتا با توجه به تابع زیر نام گذاری شده است

$$\zeta(s) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \cdots + \left(\frac{1}{k}\right)^s + \cdots$$

که آن را در ریاضیات، تابع زتای ریمان گویند.

توزیع زتا توسط اقتصاد دان ایتالیایی پارتو برای توصیف توزیع درآمد خانواده ها در یک کشور به کار برده شده است. ولی، زیپ این توزیع را در زمینه های وسیعی از علوم به کار برد و استفاده از آن را عام ساخت.

تمرینهای نظری

۱- مقدار N کوپن متمایز وجود دارد، و هربار که یکی از آنها مستقلاً انتخاب می شود با احتمال P_i، $i = ..., N$ از نوع i خواهد بود. فرض کنید T تعداد انتخابهای لازم برای انتخاب حداقل یکی از هر نوع باشد. مطلوب است محاسبهٔ $P\{T = n\}$.

۲- خاصیت ۳ را برای تابع توزیع ثابت کنید.

۳- مقدار $P\{X \geq a\}$ را بر حسب تابع توزیع X بنویسید.

۴- تساوی زیر را ثابت کنید یا یک مثال نقض برای آن پیدا کنید

$$P\{X < b\} = \lim_{b_n \to b} P\{X < b_n\}$$

۵ - اگر X دارای تابع توزیع F باشد تابع توزیع متغیر تصادفی $\alpha X + \beta$ که در آن α و β مقادیر ثابت و $\alpha \neq 0$ چیست؟

۶- n قطعه به صورت خطی به هم وصل شده اند. فرض کنید هر قطعه بطور مستقل با احتمال p عمل می کند. احتمال این که هیچ یک از دو قطعهٔ مجاور خراب نباشد چقدر است؟

۷ - تعداد n آزمایش متوالی مستقل را در نظر بگیرید، احتمال موفقیت در هریک از آنها برابر p است. اگر روی هم k موفقیت داشته باشیم، ثابت کنید هریک از $n! / k! (n - k)!$ ترکیب ممکن k موفقیت و $n - k$ شکست همشانس هستند.

۸- فرض کنید X یک متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای (n , p) باشد. به ازای چه مقدار p احتمال $P\{X = k\}$، $k = 0,1, . . . n$ ماکزیمم می شود؟ این یک روش آماری برای برآورد p است وقتی مقدار یک متغیر تصادفی دو جمله ای (n , p) برابر k است. اگر n را معلوم فرض کنیم برآورد p مقداری است که $P\{X = k\}$ را ماکزیمم کند. این مقدار را برآورد درست نمایی ماکزیمم گویند.

۹- خانواده ای با احتمال αp^n، $n \geq 1$ دارای n بچه است، که در آن $\alpha \leq \frac{1 - p}{p}$.

(الف) چه نسبتی از خانواده ها فاقد بچه هستند؟

(ب) اگر هر بچه با احتمال مساوی پسر یا دختر باشد (مستقل از یکدیگر) چه نسبتی از خانواده ها دارای k پسر (و هر تعداد دختر) خواهند بود؟

۱۰- فرض کنید سکه ای را بطور مستقل n بار می اندازیم، در صورتی که می دانیم احتمال آمدن شیر p است. ثابت کنید احتمال این که تعداد شیرها زوج باشد برابر است با

که در آن $q = 1 - p$. این تساوی را با اثبات رابطهٔ زیر و استفاده از آن به دست آورید

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i} p^{2i} q^{n-2i} = \frac{1}{2}[(p+q)^n + (q-p)^n]$$

که در آن $\left[\frac{n}{2}\right]$ بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی $\frac{n}{2}$ است. این تمرین را با تمرین نظری ۱۳ در فصل ۳ مقایسه کنید.

۱۱ – فرض کنید X یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ باشد. ثابت کنید $P\{X=i\}$ با i بطور یکنوا صعود می کند و سپس بطور یکنوا نزول خواهد کرد و ماکزیمم آن وقتی است که i برابر بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی λ باشد.

[**راهنمایی** : عبارت زیر را در نظر بگیرید $P\{X=i\} / P\{X=i-1\}$] .

۱۲ – فرض کنید X دارای توزیع پواسن با پارامتر λ باشد. ثابت کنید که

$$P\{X \text{ زوج}\} = \tfrac{1}{2}[1 + e^{-2\lambda}]$$

(الف) با استفاده از مسألهٔ ۱۰ و رابطهٔ بین متغیرهای تصادفی دو جمله ای و پواسن.

(ب) مستقیماً با استفاده از بسط $e^{\lambda} + e^{-\lambda}$.

۱۳ – فرض کنید X یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ باشد. به ازای چه مقدار λ عبارت $P\{X = k\}, k \geq 0$ ماکزیمم می شود؟

۱۴ – در مجموعه ای از n نفر که بتصادف انتخاب شده اند فرض کنید E_{ij} این پیشامد باشد که دو فرد i و j دارای یک تاریخ تولد باشند. فرض کنید احتمال این که تولد هر فرد در یکی از ۳۶۵ روز سال باشد یکسان است. مطلوب است محاسبهٔ

(الف) $P(E_{3,4}|E_{1,2})$

(ب) $P(E_{1,3}|E_{1,2})$

(پ) $P(E_{2,3}|E_{1,2} \cap E_{1,3})$

از مطالب فوق در مورد استقلال $\binom{n}{2}$ پیشامد E_{ij} چه نتیجه ای می توان گرفت؟

۱۵ – جعبه ای دارای $2n$ مهره است به قسمی که ۲ مهره با شمارهٔ ۱ و ۲ مهره با شماره ۲، . . . ، و ۲ مهره با شمارهٔ n است. مهره ها بتوالی و دو به دو خارج می شوند (بدون جایگذاری) فرض کنید T اولین انتخابی باشد که در آن دو مهرهٔ خارج شده دارای شمارهٔ i

باشد. (و آن را برابر بی نهایت بگیرید اگر هیچ کدام از زوجها برابرنباشند). برای $0 < \alpha < 1$ ثابت کنید

$$\lim_{n} P\{T > \alpha n\} = e^{-\alpha/2}$$

برای اثبات تساوی فوق فرض کنید M_k تعداد زوجهای خارج شده در k انتخاب اولیه باشد، $k = 1, \ldots n$.

(الف) نشان دهید وقتی n بزرگ است M_k را می توان به عنوان تعداد موفقیتها در k آزمایش (تقریباً) مستقل در نظر گرفت.

(ب) وقتی n بزرگ است مقدار تقریبی $P\{M_k = 0\}$ را محاسبه کنید.

(پ) پیشامد $\{T > \alpha n\}$ را بر حسب مقدار یکی از متغیرهای M_k بنویسید.

(ت) احتمال حدی فوق را ثابت کنید.

۱۶- فرض کنید مقدار پیشامدهای رخ داده در زمان معینی یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ است. اگر هر پیشامد با احتمال p و مستقل از سایر پیشامدها شمرده شود، ثابت کنید تعداد پیشامدهای شمرده شدهٔ یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λp است. همچنین بطور شهودی نشان دهید که این مطلب صحیح است.

به عنوان یک کاربرد مطلب فوق، فرض کنید تعداد ذرات او را نیوم در ناحیه ای یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda = ۱۰$ باشد. اگر در یک فاصلهٔ زمانی ثابت، هر ذره با احتمال $\frac{۱}{۵۰}$ کشف شود، مطلوب است احتمال آن که (الف) دقیقاً ۱ (ب) حداقل ۱ و (پ) حداکثر ۱ ذره در آن زمان کشف شود.

۱۷ - ثابت کنید

$$\sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-x} x^n \, dx$$

[**راهنمایی** : از انتگرال جزء به جزء استفاده کنید] .

۱۸- اگر X یک متغیر تصادفی هندسی باشد، بطور تحلیلی ثابت کنید

$$P\{X = n + k \mid X > n\} = P\{X = k\}$$

یک استدلال شهودی برای اثبات فوق با تغییر متغیر تصادفی هندسی پیدا کنید.

۱۹- برای یک متغیر تصادفی فوق هندسی با تابع جرم احتمال (۶-۴) مقدار

$$P\{X = k + 1\}/P\{X = k\}.$$

را به دست آورید.

۲۰- مهره هایی با شماره های ۱ تا N در جعبه ای قرار دارند. n مهره، $n \leq N$ ، بتصادف از این جعبه بدون جایگذاری خارج می کنیم. اگر Y بزرگترین شمارهٔ انتخاب شده باشد تابع جرم احتمال Y را پیدا کنید.

۲۱- در جعبه ای $n + m$ مهره به شماره های ۱ ، ۲، . . . ، $n + m$ موجود است. تعداد n مهره بتصادف از این جعبه خارج می کنیم . اگر X تعداد مهره های خارج شده باشد که شماره های آنها از شماره های همهٔ مهره های باقیمانده در جعبه بزرگترند، تابع جرم احتمال X را پیدا کنید.

۲۲- جعبه ای دارای n مهره است. فرض کنید متوالیاً یک مهره خارج کرده و پس از جایگذاری مهرهٔ دیگر را خارج می کنیم. این عمل را ادامه می دهیم تا مهره ای به دست آید که قبلاً خارج شده است. اگر X تعداد مهره های خارج شده باشد، تابع جرم احتمال X را محاسبه کنید.

۲۳- ثابت کنید اگر $N \to \alpha$

$$\frac{\binom{Np}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}} \to \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

این رابطه تقریب دو جمله ای را با توزیع هندسی نشان می دهد. علاوه بر این، یک تعبیر شهودی برای درستی معادلهٔ ارائه دهید.

مسائل

۱- دو مهره بتصادف از جعبه‌ای دارای ۸ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ نارنجی انتخاب می‌شود. فرض کنید برای هر مهرهٔ سیاه ۲۰۰۰ ریال برنده و برای هر مهرهٔ سفید انتخاب شده ۱۰۰۰ ریال بازنده می‌شویم. اگر X مقدار برد باشد مقادیر ممکن X چیست و احتمال هریک از مقادیر آن چقدر است؟

۲- دو تاس سالم را می‌ریزیم. اگر X حاصل ضرب دو تاس باشد، مطلوب است محاسبه $P\{X = i\}, i = 1, 2, \ldots$

۳- سه تاس را می‌ریزیم، با فرض این که $۲۱۶ = ۶^۳$ برآمد ممکن هم احتمال باشد، اگر X مجموع سه تاس باشد، احتمال هریک از مقادیر X را پیدا کنید.

۴- به پنج مرد و ۵ زن بر حسب نمرهٔ امتحانی رتبه داده شده است. فرض کنید هیچ دو نمره‌ای برابر نباشد، و تمام !۱۰ ترتیب ممکن هم احتمال است. اگر X بزرگترین رتبهٔ یک زن باشد (مثلاً، $X = 2$ است اگر بزرگترین رتبهٔ مربوط به یک مرد و نفر بعدی زن باشد)، مطلوب است محاسبهٔ $P\{X = i\}$، $i = 1, 2, 3, \ldots, 8, 9, 10$.

۵- فرض کنید X تفاوت بین تعداد شیرها و خطها در پرتاب n باریک سکه باشد، مقادیر ممکن X را محاسبه کنید.

۶- درمسألهٔ ۵ اگرسکه سالم باشد به ازای $n = ۳$ احتمال مقادیر ممکن X رامحاسبه کنید.

۷- تاسی را دو بار می‌ریزیم. مقادیر ممکن متغیرهای تصادفی زیر را تعیین کنید:

(الف) ماکزیمم مقدار حاصل در دو پرتاب

(ب) مینیمم مقدار حاصل در دو پرتاب.

(پ) مجموع دو پرتاب.

(ت) مقدار پرتاب اول منهای مقدار پرتاب دوم.

۸- اگر تاس مسألهٔ ۷ سالم باشد احتمال متغیرهای قسمت (الف) تا (ت) را محاسبه کنید.

۹- مثال (۱ ب) را تکرار کنید وقتی مهره‌های انتخاب شده جانشین شوند.

۱۰- در مثال (۱ ت) مطلوب است احتمال شرطی بردن i ریال در صورتی که مقداری برنده شده‌ایم. مقدار آن را به ازای $i = 1,2,3$ محاسبه کنید.

۱۱- (الف) یک عدد صحیح مانند N بتصادف از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 10^3\}$ که همهٔ اعضا هم

احتمال هستند انتخاب می شود. احتمال آن که عدد انتخاب شده بر ۳ بخش پذیر باشدچقدراست؟ بر ۵ بخش پذیرباشدچقدر است؟ بر ۷؟ بر ۱۵؟ بر ۱۰۵؟ چه تغییری در جوابها داده می شود اگر به جای 10^3 عدد 10^k قرار گیرد و k رفته رفته بزرگتر شود؟

(ب) یک تابع مهم در تئوری اعداد ـ که خواص آن با مسائل لاینحل ریاضیات در ارتباط است، فرض ریمان ـ تابع موبیوس $\mu(n)$، است که برای تمام اعداد صحیح مثبت به صورت زیر تعریف می شود: ابتدا n را به عوامل اول تجزیه می کنیم. اگر یکی از عوامل اول تکرار شد مانند ۳ × ۲ × ۲ = ۱۲ یا ۷ × ۷ = ۴۹ در آن صورت $\mu(n)$ برابر صفر است. از طرف دیگر اگر تمام عوامل اول متمایز باشند، $\mu(n)$ برابر ۱ است اگر تعداد عوامل اول فرد باشد، و برابر ۱ − است اگر تعداد عوامل اول زوج باشد. مثلاً چون ۳ × ۲ = ۶ داریم ۱ = $\mu(۶)$ و چون ۵ × ۳ × ۲ = ۳۰ داریم ۱ − = $\mu(۳۰)$. حال فرض کنید عدد N بتصادف از مجموعه $\{1, 2, \dots, 10^k\}$ انتخاب شود که در آن k یک عددبزرگ است. مطلوب است توزیع $\mu(N)$ وقتی $(k \to \infty)$.

[راهنمایی: برای محاسبهٔ $P\{\mu(N) \neq 0\}$ از اتحاد زیر استفاده می کنیم.

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{P_i^2 - 1}{P_i^2} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{48}{49}\right) \cdots = \frac{6}{\pi^2}$$

که در آن P_i کوچکترین عدد اول i ام است. (عدد۱ را به عنوان عدد اول درنظر نمی گیریم).

۱۲ − در بازی «دو انگشتی مورا» دو بازیکن یک یا دو انگشت خود را نشان می دهند و در همان حال تعداد انگشتان طرف مقابل را نیز حدس می زنند. اگر فقط یکی از بازیکنها درست حدس بزند مبلغی معادل مجموع انگشتهای نشان داده شده دریافت می کند. اگر هردو بازیکن درست حدس زده باشند یا هیچ کدام درست حدس نزده باشند در آن صورت هیچ پولی رد و بدل نخواهد شد. در یک بازی معینی فرض کنید X میزان برد بازیکن معینی در یک بازی دو انگشتی باشد.

(الف) اگر هر بازیکن مستقل عمل کند و فرض شود چهار حالت ممکن هم احتمال باشند، مقادیر ممکن X و احتمالهای متناظر را محاسبه کنید.

(ب) فرض کنید هر بازیکن مستقلاً عمل می کند. اگر هردو تصمیم بگیرند انگشتان

مساوی با آنچه حدس می زنند نشان دهند و احتمال نشان دادن ۱ یا ۲ انگشت یکسان باشد، مقادیر ممکن X و احتمالهای متناظر آنها را محاسبه کنید.

۱۳- فرض کنید تابع توزیع X به صورت زیر باشد.

$$F(b)=\begin{cases}0 & b<0\\ \dfrac{b}{4} & 0\le b<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{b-1}{4} & 1\le b<2\\ \dfrac{11}{12} & 2\le b<3\\ 1 & 3\le b\end{cases}$$

مطلوب است محاسبهٔ $P\{X=i\}$ ، $i=1,2,3$ ، مقدار $P\left\{\frac{1}{2}<\times X<\frac{3}{2}\right\}$ را به دست آورید.

۱۴- سکه ای را ۴ بار می اندازیم. فرض کنید X تعداد شیرهای به دست آمده باشد. تابع جرم احتمال متغیر تصادفی $X-2$ را رسم کنید.

۱۵- اگر تابع توزیع X به صورت زیر باشد

$$F(b)=\begin{cases}0 & b<0\\ \frac{1}{2} & 0\le b<1\\ \frac{3}{5} & 1\le b<2\\ \frac{4}{5} & 2\le b<3\\ \frac{9}{10} & 3\le b<3.5\\ 1 & b\ge 3.5\end{cases}$$

تابع جرم احتمال X را محاسبه کنید.

۱۶- مهره ای از یک جعبه که دارای ۳ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است خارج می شود. پس از جایگذاری مهرهٔ دیگری خارج می شود و این عمل را تا بی نهایت ادامه می دهیم. احتمال این که در چهار مهره اول دقیقاً ۲ مهره سفید باشد چقدر است ؟

۱۷- در امتحانی ۵ سؤال ۳ جوابی داده شده است ، احتمال این که محصلی به چهار سؤال یا بیشتر بطور حدسی جواب درست بدهد چقدر است؟

۱۸- مردی ادعا می کندکه قدرت پیش بینی دارد. برای امتحان او یک سکهٔ سالم ۱۰ بار انداخته می شود و از او سؤال می شود که برآمد آزمایش را قبلاً پیش بینی کند. این مرد ۷ بار از ۱۰ بار را صحیح جواب داد. احتمال این که حداقل به این خوبی پیش بینی کند اگر ادعایش درست نباشد چقدر است؟

۱۹- فرض کنید موتورهای هواپیمای در حال پرواز با احتمال $1-p$ مستقل از یکدیگر خراب می شوند. اگر برای پرواز موفقیت آمیز هواپیما لازم باشد اکثریت موتورها درست عمل کنند، برای چه مقادیر p هواپیمای ۵ موتوره بر ۳ موتوره ترجیح دارد؟

۲۰- یک کانال مخابراتی ارقام 0 و ۱ را منتقل می کند. ولی به علت استاتیک ارقام منتقل شده با احتمال ۰٫۲ نادرست دریافت می شوند. فرض کنید که می خواهیم یک پیغام مهم شامل یک رقم دو دویی را مخابره کنیم. برای کاهش خطا به جای 0 عدد 0000 و به جای ۱ عدد ۱۱۱۱۱ مخابره می شود. اگر دریافت کنندهٔ پیغام از «کثرت» تبدیل کُد استفاده کند، احتمال این که برگردان پیغام برگردانده شده غلط باشد چقدر است؟چه فرضهایی برای استقلال در نظر می گیرید.

۲۱- یک سیستم ماهواره ای از n مؤلفه تشکیل می شود و وقتی درست عمل می کند که حداقل k مؤلفه آن درست عمل کنند. در یک روز بارانی هریک از مؤلفه ها مستقل از یکدیگر با احتمال p_1 عمل می کند در صورتی که در یک روز غیر بارانی هریک با احتمال p_2 عمل می کنند. اگر احتمال فردا باران بیاید α باشد، احتمال این که سیستم ماهواره ای درست عمل کند چقدر است؟

۲۲- دانشجویی برای یک امتحان شفاهی مهم آماده می شود و در مورد یک روز «کاری» یا «تعطیلی» فکر می کند. او حساب می کند که اگر یک روز کاری باشد هریک از ممتحنان او را با احتمال ۰٫۸ مستقل از یکدیگر قبول می کنند، ولی اگر یک روز تعطیلی داشته باشد این احتمال به ۰٫۴ کاهش پیدا می کند. فرض کنید اگر اکثریت ممتحان او را قبول کند این دانشجو در امتحان قبول می شود. اگر دانشجو احساس کند که احتمال روز کاری دو برابر روز تعطیلی است، آیا باید متقاضی امتحانی با ۳ ممتحن باشد یا ۵ ممتحن؟

۲۳- فرض کنید حداقل ۹ نفر از ۱۲ نفر هیأت منصفه برای مجرم شناختن یک مدافع ضروری است. فرض کنید احتمال اینکه یکی از قضات گناهکاری را بیگناه تشخیص دهد ۰٫۲، ولی احتمال این که یک قاضی بی گناهی را مجرم تشخیص دهد ۰٫۱ است. اگر قاضیها

بطور مستقل عمل کنند و اگر ۶۵ درصد مدافعان گناهکار باشند، مطلوبست احتمال این که هیأت منصفه تصمیم درست بگیرند. چند درصد مدافعان مجرم شناخته می شوند؟

۲۴- می دانیم دیسکت های ساخت یک کمپانی با احتمال ۰٫۰۱ و مستقل از یکدیگر معیوب است. این کمپانی دیسکتها را در بسته های ۱۰ تایی می فروشد و تضمین می کند که پول خریدار را پس دهد اگر بیشتر از یک دیسکت در هر بسته معیوب باشد. اگر کسی ۳ بسته خریداری کند، احتمال این که یکی از آنها را برگرداند چقدر است؟

۲۵- فرض کنید ۱۰ درصد تراشه های ساخت یک کارخانه سخت افزار کامپیوتر معیوب است. اگر از آنها ۱۰۰ عدد سفارش دهیم آیا تعداد معیوبهای خریداری شده یک متغیر تصادفی دو جمله ای است؟

۲۶- فرض کنید تعداد تصادفات یک بزرگراه در روز یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda = 3$ است.

(الف) احتمال این که امروز ۳ تصادف یا بیشتر رخ دهد چقدر است؟

(ب) قسمت الف را تکرار کنید با این فرض که حداقل امروز یک تصادف رخ می دهد.

۲۷ - تقریب پواسن را با احتمال دوجمله ای برای موارد زیر مقایسه کنید

(الف) به ازای $n = 8, p = .1;$ $P\{X = 2\}$

(ب) به ازای $n = 10, p = .95;$ $P\{X = 9\}$

(پ) به ازای $n = 10, p = .1;$ $P\{X = 0\}$

(ت) به ازای $n = 9, p = .2.$ $P\{X = 4\}$

۲۸- اگر ۵۰ بلیت بخت آزمایی با احتمال برد $\frac{1}{100}$ خریداری کنیم مطلوب است احتمال (تقریبی) برد (الف) حداقل یک جایزه (ب) دقیقاً یک جایزه (ج) حداقل دو جایزه.

۲۹- تعداد سرماخوردگیهای یک فرد در سال یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda = 5$ است. فرض کنید یک داروی جدید «محتوی مقدار زیادی ویتامین C» به بازار آمده است که پارامتر توزیع پواسن را برای ۷۵ درصد جمعیت به $\lambda = 3$ کاهش می دهد. برای ۲۵ درصد بقیه دارو اثر قابل ملاحظه ای ندارد. اگر فردی دارو را به مدت یک سال مصرف کند و ۲ بار سرماخورده باشد آیا دارو برای او مفید بوده است.

۳۰- احتمال توزیع یک فول هوس در یک دست ورق پوکر تقریباً ۰٫۰۰۱۴ است. احتمال

تقریبی این که در ۱۰۰۰ بازی حداقل ۲ فول هوس بار به دست آید چقدر است؟

۳۱- تعداد n زوج متأهل بتصادف دور میز گردی می نشینند احتمال آن که هیچ مردی کنار همسرش قرار نگیرد چقدر است؟ به ازای n = ۱۰ مقدار تقریبی حاصل را با جواب دقیق حاصل در مثال ۵ د در فصل ۲ مقایسه کنید.

۳۲ - افراد به میزان یک نفر در ۲ دقیقه وارد فروشگاهی می شوند.

(الف) احتمال این که در فاصلهٔ زمانی ۰ : ۱۲ تا ۱۲/۰۵ هیچ کس داخل نشود چقدر است؟

(ب) احتمال این که حداقل ۴ نفر در آن زمان داخل شوند چقدر است؟

۳۳- میزان خودکشی در ایالتی یک در ۱۰۰۰۰۰ ساکنان در ماه است.

(الف) احتمال آن که در شهری با جمعیت ۴۰۰۰۰۰ نفر در این ایالت ۸ نفر یا بیشتر در یک ماه خودکشی کنند چقدر است؟

(ب) احتمال آن که حداقل ۲ ماه در سال ۸ خودکشی یا بیشتر داشته باشد چقدر است؟

(پ) اگر این ماه را شماره ۱ بنامیم احتمال این که اولین ماه با ۸ خودکشی یا بیشتر ماه i ام، $i \geq 1$ ، باشد چقدر است؟

۳۴- می دانیم ۱۰ درصد بیمارانی که علایم خاصی را دارند به یک بیماری معین مبتلا هستند تشخیص نهایی این بیماری با آزمایش خون بیمار است. ولی چون آزمونهای خون خیلی گران است خون شناس صبر می کند تا n بیمار با آن علامت به او مراجعه کنند. در این صورت او خون n بیمار را مخلوط کرده و روی آن یک آزمایش انجام می دهد. اگر هیچ کدام از n نفر بیماری را نداشته باشند در آن صورت آزمون خون مخلوط شده منفی خواهد بود. ولی اگر حداقل یک نفر از بیماران آن مرض را داشته باشد آزمون خون مثبت خواهد بود، و پزشک ناگزیر است که خون هر فرد را آزمایش کند تا معلوم شود از میان n بیمار کدامها مبتلا هستند.

(الف) احتمال این که خون مخلوط شده منفی باشد چقدر است اگر (i) n = ۲ (ii) n = ۴ (iii) n = ۶ و (iv) n = ۱۰؟

(ب) فرض کنید X تعداد آزمایشهایی باشد که خون شناس باید در مورد n بیمار انجام دهد، تابع جرم احتمال X را پیدا کنید اگر (i) n = ۲ (ii) n = ۴ ، (iii) n = ۶ و (۱۷) n = ۱۰.

۳۵- هریک از ۵۰۰ نفری که در یک مؤسسه نظامی کار می کنند مستقل از یکدیگر با احتمال $\frac{1}{10^3}$ مبتلا به یک بیماری هستند. این بیماری با آزمایش خون مشخص می شود، و برای سادگی کار نمونه های خون تمام ۵۰۰ نفر مخلوط شده و سپس آزمایش می شود.
(الف) احتمال (تقریبی) این که نتیجهٔ آزمایش مثبت باشد (یعنی حداقل یکی از آنها مبتلا باشد) چقدر است؟
حال فرض کنید نتیجهٔ آزمایش مثبت شده است
(ب) با شرایط فوق احتمال این که بیش از یک نفر مبتلا باشد چقدر است؟
حامد یکی از ۵۰۰ نفر است که می داند مبتلاست
(پ) از نظر حامد احتمال این که بیش از یک نفر مبتلا باشد چقدر است؟
چون آزمون خون مخلوط مثبت است، مسؤولان تصمیم می گیرند هر فرد را جداگانه آزمایش کنند. تعداد $i-1$ آزمایش اول منفی بودند، نفر i ام که حامد بود مثبت شد.
(ت) اگر مطلب فوق را به صورت تابعی از i در نظر بگیریم، احتمال این که هریک از افراد باقیمانده مبتلا باشند چقدر است؟

۳۶- یک چرخ رولت را که شامل ۳۸ عدد، از ۱ تا ۳۶ و ۰ و ۰۰، است در نظر می گیریم. اگر اسمیت همیشه روی شمارهٔ ۱ تا ۱۲ شرط بندی کند، احتمال این که ۵ بازی اول را ببازد چقدر است؟ احتمال این که اولین برد او در شرط بندی چهارم باشد چقدر است؟

۳۷- دو تیم ورزشی یک سری بازی را ترتیب می دهند، برنده تیمی است که ۴ بازی را ببرد. فرض کنید که یکی از تیمها از دیگران قویتر است و هر بازی را با احتمال ۰٫۶ مستقل از برآمد بازیهای دیگر می برد. احتمال این که تیم قویتر پس از i بازی برنده شود چقدر است؟ مسأله را برای $i = 4, 5, 6, 7$ حل کنید، احتمال برد تیم قویتر را با حالت قبل مقایسه کنید، اگر بدانیم از هر ۳ بازی ۲ بازی را می برد.

۳۸- به مصاحبه گر فهرستی شامل افراد مورد نظر برای مصاحبه داده می شود. اگر لازم باشد که با ۵ نفر مصاحبه کند و هر فرد (مستقلاً) با احتمال $\frac{2}{3}$ برای مصاحبه حاضر شود، احتمال این که فهرست او برای مصاحبه کافی باشد چقدر است درصورتی که این فهرست:
(الف) شامل ۵ نفر باشد و (ب) شامل ۸ نفر باشد در قسمت (ب) احتمال این که مصاحبه گر دقیقاً: (پ) با ۶ نفر صحبت کند و (ت) با ۷ نفر از افراد مورد نظر صحبت کند چقدر است؟

۳۹- یک سکهٔ سالم را مرتباً می اندازیم تا ده شیر به دست آید. اگر X تعداد خطها باشد تابع جرم احتمال X را محاسبه کنید.

۴۰- مسألهٔ کبریت با ناخ (مثال ۶ پ) را در صورتی حل کنید که جعبهٔ جیب چپ در اول N_1 کبریت و جعبه جیب راست N_2 کبریت داشته باشد.

۴۱- در مسأله کبریت باناخ در لحظه ای که اولین قوطی کبریت خالی است احتمال این که جعبهٔ دیگر دارای k کبریت باشد چقدر است؟

۴۲- جعبه ای دارای ۴ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه است. چهار مهره بتصادف انتخاب می کنیم. اگر دو مهره سفید و ۲ مهره سیاه باشد عمل متوقف می شود. در غیر این صورت مهره ها را به جعبه بر می گردانیم و دوباره بتصادف ۴ مهره خارج می کنیم. این عمل را ادامه می دهیم تا دقیقاً ۲ مهره از ۴ مهرهٔ انتخاب شده سفید باشد. احتمال این که دقیقاً n انتخاب داشته باشیم چقدر است؟

۴۳- یک بازی معمول در قمارخانه نوادا ، کینو است که به صورت زیر بازی می شود: ۲۰ عدد بتصادف به وسیلهٔ قمارخانه از بین اعداد ۱ تا ۸۰ انتخا ب می شود. یک بازیکن می تواند اعدادی از ۱ تا۱۵ انتخاب کند. اگر این کسری از اعدا د انتخاب شده توسط بازیکن با هریک از ۲۰ عدد انتخاب شده توسط قمارخانه برابر باشد برنده می شود. مقدار پرداخت تابعی از تعداد اعداد انتخاب شده به وسیله باریکن و تعداد شماره های برابر است. مثلاً، اگر بازیکن فقط یک عدد انتخاب کند وقتی برنده می شود که این عدد در میان ۲۰ عدد فوق باشد، و مقدار برد برابر ۲٫۲ هر دلار شرط بندی شده است. (چون احتمال برد در این حالت برابر $\frac{1}{4}$ است، واضح است که مبلغ پرداخت عادلانه باید ۳ دلار به ازای هر دلار شرط بندی باشد.) وقتی بازیکن ۲ شماره انتخاب کند مبلغ پرداخت ۱۲ دلار به ازای هر دلار شرط بندی شده است اگر هر دو عدد در میان ۲۰ عدد باشند،

(الف) مبلغ پرداخت عادلانه در این حالت چقدر است؟

فرض کنید P_{nk} این احتمال باشد که دقیقاً k شماره از n شمارهٔ انتخاب شده توسط بازیکن در میان ۲۰ عدد انتخاب شده توسط قمارخانه باشد.

(ب) مقدار P_{nk} را محاسبه کنید.

(پ) بیشتر قماربازان در کینو ۱۰ شماره انتخاب می کنند. در این شرط بندی پرداخت قمارخانه طبق جدول زیر است.

ستون آخر این جدول را کامل کنید.

جدول پرداخت کینو برای شرطهای ۱۰ عددی

تعداد ماشینها	دلارهایی که برای هر 1 $ شرط بندی شده برنده می شود	مقداری که باید پرداخت نماید
0–4	−1	
5	1	
6	17	
7	179	
8	1,299	
9	2,599	
10	24,999	

۴۴- در مثال (۶ ث) چند درصد از i بسته معیوب را خریدار پس می دهد؟ مسأله را برای ۱، ۴ = i حل کنید. اگر یک بسته پس داده شود، احتمال آن که دارای ۴ مؤلفهٔ معیوب باشد چقدر است؟

۴۵- یک خریدار ترانزیستور آنها را در بسته های ۲۰ تایی خریداری می کند. از هر بسته ۴ مؤلفه را بتصادف انتخاب کرده فقط وقتی پذیرفته می شود که تمام ۴ مؤلفهٔ سالم باشند. اگر هر مؤلفه در یک بسته مستقلاً با احتمال ۰/۱ معیوب باشد چه نسبتی از بسته ها رد می شوند؟

محاسبه تابع توزیع دو جمله‌ای

```
10 PRINT"THE DISTRIBUTION FUNCTION OF A BINOMIAL(n,p) RANDOM VARIABLE"
20 PRINT "ENTER n"
30 INPUT N
40 PRINT "ENTER p"
50 INPUT P
60 PRINT "ENTER i"
70 INPUT I
80 S=(1-P)^N
90 IF S=0 GOTO 180
100 A=P/(1-P)
110 T=S
120 IF I=0 GOTO 390
130 FOR K=0 TO I-1
140 S=S*A*(N-K)/(K+1)
150 T=T+S
160 NEXT K
170 GOTO 390
180 J=I
190 IF J>N*P THEN J=INT(N*P)
200 FOR K=1 TO J
210 L=L+LOG(N+1-K)-LOG(J+1-K)
220 NEXT K
230 L=L+J*LOG(P)+(N-J)*LOG(1-P)
240 L=EXP(L)
250 B=(1-P)/P
260 F=1
270 FOR K=1 TO J
280 F=F*B*(J+1-K)/(N-J+K)
290 T=T+F
300 NEXT K
310 IF J=I GOTO 380
320 C=1/B
330 F=1
340 FOR K=1 TO I-J
350 F=F*C*(N+1-J-K)/(J+K)
360 T=T+F
370 NEXT K
380 T=(T+1)*L
390 PRINT "THE PROBABILITY IS";T
400 END
```

محاسبه تابع توزیع پواسن

```
10 PRINT "THE PROBABILITY THAT A POISSON VARIABLE  IS LESS THAN OR EQUAL TO i"
20 PRINT "ENTER THE MEAN OF THE RANDOM VARIABLE"
30 INPUT C
40 PRINT "ENTER THE DESIRED VALUE OF i"
50 INPUT I
60 S=EXP(-C)
70 IF S=0 GOTO 150
80 T=S
90 IF I=0 GOTO 340
100 FOR K=0 TO I-1
110 S=S*C/(K+1)
120 T=T+S
130 NEXT K
140 GOTO 340
150 J=I
160 IF J>C THEN J=INT(C)
170 FOR K=1 TO J
180 FAC=FAC+LOG(K)
190 NEXT K
200 L=-C-FAC+J*LOG(C)
210 L=EXP(L)
220 F=1
230 FOR K=1 TO J
240 F=F*(J+1-K)/C
250 T=T+F
260 NEXT K
270 IF J=I GOTO 330
280 F=1
290 FOR K=1 TO I-J
300 F=F*C/(K+J)
310 T=T+F
320 NEXT K
330 T=(T+1)*L
340 PRINT "THE PROBABILITY IS";T
350 END
```

فصل پنجم

متغیرهای تصادفی پیوسته

۱ - مقدمه

در فصل پیش متغیرهای تصادفی گسسته، یعنی متغیرهای تصادفی که مقادیر ممکن آنها متناهی یا شمارای متناهی بود، را در نظر گرفتیم. با وجود این، متغیرهای تصادفی ای نیز وجود دارد که مجموعهٔ مقادیر ممکن آنها نا شمار است. دو مثال از آن، زمان ورود یک قطار به ایستگاهی مشخص و عمر یک ترانزیستور است. فرض کنید X چنین متغیر تصادفی ای باشد. می گوییم X یک متغیر تصادفی **پیوسته**[1] است، اگر تابع نا منفی f، که برای تمام اعداد حقیقی x در $(-\infty, \infty)$ تعریف شده است، وجود داشته باشد با این ویژگی که برای هر مجموعه B از اعداد حقیقی داشته باشیم

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)\, dx \qquad (۱-۱)$$

تابع f، **تابع چگالی احتمال** متغیر تصادفی X نامیده می شود.

معادلهٔ (۱-۱) بیانگر آن است که احتمال بودن X در B را با انتگرال گیری تابع چگالی احتمال بر مجموعهٔ B می توان به دست آورد. چون X باید مقداری انتخاب کند، f

۱ - گاهی آن را مطلقاً پیوسته می نامند.

باید در

$$1 = P\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

صدق کند. همهٔ گزاره های مربوط به X را می توان بر حسب f پاسخ داد. برای مثال، اگر قرار دهیم B= [a, b] از معادلهٔ (۱-۱) حاصل می شود

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_{a}^{b} f(x)\, dx \qquad (۲-۱)$$

اگر در معادلهٔ (۱-۲)، قرار دهیم a = b ، داریم

$$P\{X = a\} = \int_{a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

این معادله بیان می کند که احتمال این که متغیر تصادفی پیوسته مقدار ثابتی را اختیار کند برابر صفر است. بنابراین برای یک متغیر تصادفی پیوسته، داریم

$$P\{X < a\} = P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$$

مثال ۱ الف. فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته است که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱- مقدار C را تعیین کنید

۲- $P\{X > 1\}$ را بیابید.

حل: چون f تابع چگالی احتمال است، باید داشته باشیم $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ ، از آن جا نتیجه می شود

$$C \int_{0}^{2} (4x - 2x^2)\, dx = 1$$

یا

$$C\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=2} = 1$$

یا

$$C = \frac{3}{8}$$

بنابر این

$$P\{X > 1\} = \int_1^\infty f(x)\,dx = \tfrac{3}{8}\int_1^2 (4x - 2x^2)\,dx = \tfrac{1}{2}$$

مثال ۱ ب. مدت زمانی که یک کامپیوتر (به ساعت) قبل از خراب شدن کار می کند، یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

احتمال این که کامپیوتری قبل از خراب شدن بین ۵۰ و ۱۵۰ ساعت کار کند چقدر است؟ احتمالی که این کامپیوتر کمتر از ۱۰۰ ساعت کار کند چقدر است؟

حل : چون

$$1 = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lambda \int_0^\infty e^{-x/100}\,dx$$

داریم

$$1 = -\lambda(100)e^{-x/100}\Big|_0^\infty = 100\lambda$$

یا

$$\lambda = \frac{1}{100}$$

پس احتمالی که یک کامپیوتر، قبل از خراب شدن بین ۵۰ و ۱۵۰ ساعت کار کندبرابر است با

$$\begin{aligned} P\{50 < X < 150\} &= \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-x/100}\,dx = -e^{-x/100}\Big|_{50}^{150} \\ &= e^{-1/2} - e^{-3/2} \approx .384 \end{aligned}$$

بطو ر مشابه

$$P\{X < 100\} = \int_0^{100} \frac{1}{100} e^{-x/100}\, dx = -e^{-x/100}\Big|_0^{100} = 1 - e^{-1} \approx .633$$

به‌بیان دیگر در ۶۳/۳ درصد موارد، یک کامپیوتر قبل از رسیدن به ۱۰۰ ساعت کار خراب خواهد شد.

مثال ۱ پ. عمر یک نوع لامپ رادیویی (به ساعت) یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 100 \\ \dfrac{100}{x^2} & x > 100 \end{cases}$$

احتمالی که ۲ لامپ از ۵ لامپ از این نوع در یک دستگاه رادیو باید در ظرف ۱۵۰ ساعت اول شروع به کار تعویض شود چقدر است؟ فرض کنید پیشامدهای E_i ، $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ، یعنی این که لامپ i ام در ظرف این مدت تعویض شود، مستقلند

حل: اکنون

$$\begin{aligned} P(E_i) &= \int_0^{150} f(x)\, dx \\ &= 100 \int_{100}^{150} x^{-2}\, dx \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

بنابراین، از استقلال پیشامدهای E_i ، نتیجه می‌شود که احتمال مطلوب برابر است با

$$\binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

رابطهٔ بین توزیع تراکمی F و چگالی احتمال f با عبارت زیر بیان می‌شود

$$F(a) = P\{X \in (-\infty, a)\} = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$$

با مشتق‌گیری از دو طرف رابطهٔ فوق داریم

$$\frac{d}{da} F(a) = f(a)$$

یعنی، تابع چگالی برابر مشتق تابع توزیع تراکمی است. تعبیری را که تا حد زیادی مشهودی تر از تابع چگالی باشد می توان از معادلهٔ (۱-۲) (هرگاه ε کوچک و f (x) در x = a پیوسته باشد) به صورت زیر به دست آورد:

$$P\left\{a-\frac{\varepsilon}{2}\le X\le a+\frac{\varepsilon}{2}\right\}=\int_{a-\varepsilon/2}^{a+\varepsilon/2} f(x)\,dx \approx \varepsilon f(a)$$

به بیان دیگر، احتمالی که X در فاصله ای به طول ε به مرکز a قرار گیرد تقریباً برابر با ε f(a) است. از این جا در می یابیم که f (a) اندازه ای از احتمال نزدیکی متغیر تصادفی به a است.

چندین دسته مهم از متغیرهای تصادفی وجود دارد که عموماً در نظریه احتمال با آنها برخورد می کنیم، در چند بخش بعدی بعضی از آنها را مورد مطالعه قرار می دهیم.

۲ - متغیر تصادفی یکنواخت

گوییم یک متغیر تصادفی بر فاصله (0, 1) **بطور یکنواخت** توزیع شده است اگر تابع چگالی احتمال آن به شکل زیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases} \qquad (۱-۲)$$

توجه داشته باشید که f (x) یک تابع چگالی است زیرا $f(x)\ge 0$ و $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 dx = 1$. چون f(x) تنها وقتی که $x \in (0, 1)$ مثبت است، نتیجه می شود که X باید مقداری در (0,1) اختیار نماید. به علاوه، چون f(x) برای $x \in (0, 1)$ ثابت است، X با احتمال یکسان به هر مقداری در (0, 1) نزدیک خواهد بود. برای تحقیق آن توجه داشته باشید که برای هر $0 < a < b < 1$،

$$P\{a \le X \le b\} = \int_a^b f(x)\,dx = b-a$$

به بیان دیگر، احتمالی که X در یک زیر فاصله خاصی از (0, 1) باشد با طول این فاصله برابر است.

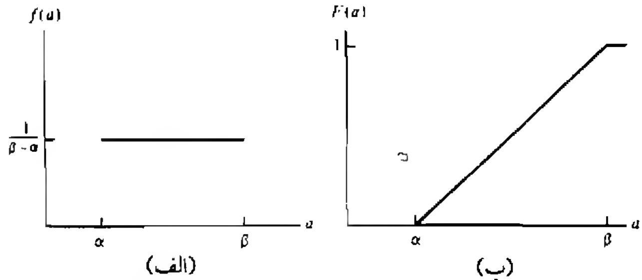
بطور کلی، گوییم X یک متغیر تصادفی یکنواخت بر فاصله (α, β) است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases} \qquad (۲-۲)$$

چون $F(a)=\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ ، از معادلهٔ (۲-۲) نتیجه می گیریم که تابع توزیع یک متغیر تصادفی یکنواخت بر فاصله (α, β) با رابطه زیر داده می شود:

$$F(a)=\begin{cases}0 & a\le\alpha\\ \dfrac{a-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha<a<\beta\\ 1 & a\ge\beta\end{cases}$$

شکل ۵ - ۱ نمودار $f(a)$ و $F(a)$ را نمایش می دهد.



شکل ۵-۱ نمودار (الف) $f(a)$ و (ب) $F(a)$ برای متغیر تصادفی یکنواخت بر (α, β)

مثال ۲ الف. اگر X بطور یکنواخت بر $(0, 10)$ توزیع شده باشد، احتمالی را که (۱) $X<۳$، (۲) $X>۶$ و (۳) $۳<X<۸$ باشد محاسبه کنید.

حل:

۱- $P\{X<3\}=\int_0^3 \frac{1}{10}\,dx=\frac{3}{10}$

۲- $P\{X>6\}=\int_6^{10} \frac{1}{10}\,dx=\frac{4}{10}$

۳- $P\{3<X<8\}=\int_3^8 \frac{1}{10}\,dx=\frac{1}{2}$

مثال ۲ ب. اتوبوسها به فاصلهٔ هر ۱۵ دقیقه که از ساعت ۷ صبح آغاز می شود به ایستگاه مشخصی وارد می شوند. یعنی اتوبوسها در ۷، ۱۵ : ۷ ، ۳۰ : ۷، ۴۵ : ۷ و به همین ترتیب الی آخر وارد می شوند. اگر مسافری در زمانی که بین ۷ و ۳۰ : ۷ بطور یکنواخت توزیع شده است وارد این ایستگاه شود، مطلوب است احتمالی که او : (۱) کمتر از ۵ دقیقه و (۲) بیشتر از ۱۰ دقیقه منتظر اتوبوس بماند.

حل : فرض کنید X دقایقی را نشان دهد که این مسافر پس از ساعت ۷ وارد ایستگاه می شود. چون X یک متغیر تصادفی یکنواخت برفاصله (۳۰، ۰) است، بنابراین نتیجه می شود که این مسافر درصورتی (و تنها درصورتی) کمتراز ۵ دقیقه بایدمنتظر بماندکه بین ساعت ۱۰ : ۷ و ۱۵ : ۷ یا بین ۲۵ : ۷ و ۳۰ : ۷ به ایستگاه برسد. پس احتمال مطلوب برای (۱) عبارت است از

$$P\{10 < X < 15\} + P\{25 < X < 30\} = \int_{10}^{15} \tfrac{1}{30}\, dx + \int_{25}^{30} \tfrac{1}{30}\, dx = \tfrac{1}{3}$$

بطور مشابه، او باید بیش از ۱۰ دقیقه منتظر بماند اگر در فاصله ساعت ۷ و ۰۵ : ۷ یا ۱۵ : ۷ و ۲۰ : ۷ به ایستگاه برسد و از این رو احتمال (۲) عبارت است از

$$P\{0 < X < 5\} + P\{15 < X < 20\} = \tfrac{1}{3}$$

مثال بعدی ابتدا به وسیله ریاضی دان فرانسوی ال. اف، برتراند در سال ۱۸۸۹ بررسی شد و غالباً به آن «پارادوکس برتراند» اطلاق می شود. این مسأله اولین آشنایی ما با موضوعی است که به آن احتمال هندسی اطلاق می شود.

مثال ۲ پ. «وتر تصادفی» از دایره ای را در نظر بگیرید. احتمالی که طول این وتر از طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاط شده در این دایره بزرگتر باشد چقدر است؟

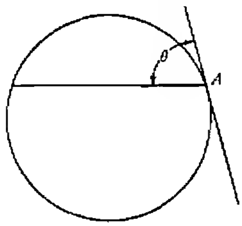
حل : این مسأله به صورت بیان شده قابل حل نیست، زیرا این که منظور از وتر تصادفی چیست روشن نیست. به منظور روشن کردن مفهوم این جمله، این مسأله را به دو طریق متمایز فرمول بندی می کنیم.

فرمول بندی اول عبارت است از : مکان این وتر را می توان با فاصله اش از مرکز دایره تعیین نمود، این فاصله بین 0 و r شعاع دایره تغییر می کند. اکنون، طول این وتر از ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاط شده در این دایره بزرگتر است اگر فاصله اش از مرکز کمتر از $\frac{r}{2}$ باشد. بنابراین، با فرض این که یک وتر تصادفی وتری است که D فاصله اش از مرکز بین 0

و r بطور یکنواخت توزیع شده است، احتمالی که طول این وتر از ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاطی بزرگتر باشد برابر است با

$$P\left\{D < \frac{r}{2}\right\} = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2}$$

به منظور فرمول بندی دومی از این مسأله، وتر دلخواهی از دایره را در نظر گرفته و از یک انتهای آن خط مماسی بر دایره رسم کنید. زاویه θ بین وتر و مماس که از 0 تا 180° درجه تغییر می کند مکان وتر را تعیین می کند (شکل ۵-۲). به علاوه طول وتر از ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاطی بزرگتر است اگر



شکل ۵-۲

زاویه θ بین ۶۰° و ۱۲۰° باشد، سپس با این فرض که وتر تصادفی وتری است که زاویه θ ی آن بین 0° و ۱۸۰° درجه بطور یکنواخت توزیع شده باشد، پاسخ مطلوب با این فرمول بندی عبارت است از

$$P\{60 < \theta < 120\} = \frac{120 - 60}{180} = \frac{1}{3}$$

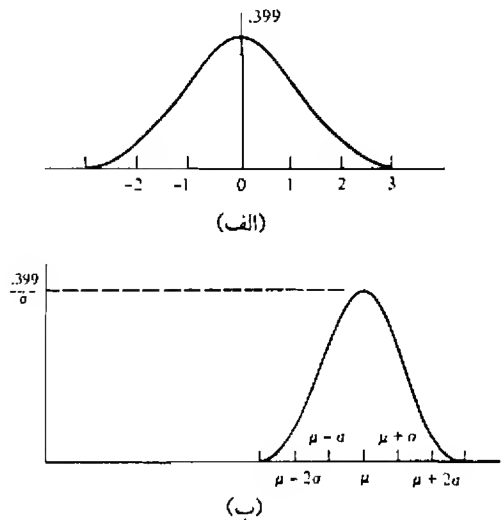
باید توجه داشت که این آزمایشهای تصادفی باید طوری انجام شوند که $\frac{۱}{۲}$ یا $\frac{۱}{۳}$ احتمال صحیح باشند. برای مثال، اگر صفحه مدوری به شعاع r بر روی میزی که با خطوط موازی به فاصله 2r خط کشی شده اند پرتاب شود، آن گاه یک و تنها یکی از این خطها صفحه را قطع و تشکیل یک وتر خواهد داد. کلیه فاصله ها از این وتر تا مرکز صفحه هم احتمالند و از این رو احتمال مطلوب که طول وتر از ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاطی بزرگتر باشد، برابر $\frac{۱}{۲}$ است. از سوی دیگر، اگر این آزمایش عبارت از چرخش آزاد یک سوزن حول نقطهٔ A برروی دایره باشد (شکل ۵-۲) پاسخ مطلوب $\frac{۱}{۳}$ است.

۳- متغیرهای تصادفی نرمال

گوییم X یک متغیر تصادفی نرمال است، یا X بطور نرمال با پارامترهای μ و σ^2 توزیع شده است اگر چگالی X به صورت زیر باشد

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

این تابع چگالی یک منحنی زنگدیس است که نسبت به μ متقارن است. (شکل ۵-۳ را ببینید). مقادیر μ و σ^2، به مفهومی مقدار میانگین و تغییرات X را نمایش می دهند (این مفاهیم در فصل ۷ روشن خواهد شد).



شکل ۵-۳ تابع چگالی نرمال: (الف) با $\mu = 0$، $\sigma = 1$ و (ب) با μ و σ^2 دلخواه

توزیع نرمال توسط ریاضیدان فرانسوی آبراهام دموار در سال ۱۷۳۳ معرفی شد و توسط خود او در تقریب احتمالهای مربوط به متغیرهای تصادفی دوجمله ای وقتی n بزرگ است مورد استفاده قرار گرفت. این نتیجه بعداً توسط لاپلاس و دیگران گسترش یافت و اکنون در یک قضیه احتمال که به قضیه حد مرکزی مشهور است گنجانده شده است، (این قضیه در فصل ۸ مورد بحث قرار خواهد گرفت). قضیه حد مرکزی، یکی از دو مهمترین نتیجه

در نظریه احتمال[1]، پایه تئوری برای این مطلب است که غالباً مشاهدات تجربی مهم و در عمل بسیاری پدیده‌های تصادفی، لااقل بطور تقریبی، از توزیع نرمال پیروی می کنند. مثالهایی که چنین رفتاری دارند عبارتند از، اندازهٔ قد یک انسان، سرعت یک ملکول در گاز در جهت دلخواه، و خطاهای حاصل در اندازه گیری یک کمیت فیزیکی.

برای اثبات این که $f(x)$ در واقع یک تابع چگالی احتمال است، باید نشان دهیم که

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx = 1$$

با تغییر متغیر $y = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$، داریم

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy$$

و بنابراین باید نشان دهیم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \sqrt{2\pi}$$

برای این منظور قرار می دهیم $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy$. بنابر این

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2+x^2)/2}\,dy\,dx \end{aligned}$$

اکنون این انتگرال دو گانه را با تغییر متغیرها به مختصات قطبی محاسبه می کنیم. (یعنی قرار می دهیم $x = z\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ dydx = rd\theta dr$). بنابر این

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} r\,d\theta\,dr \\ &= 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2/2}\,dr \\ &= -2\pi e^{-r^2/2}\Big|_0^{\infty} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

پس $I = \sqrt{2\pi}$ و نتیجه حاصل شده است.

۱ - دیگری قانون قوی اعداد بزرگ است.

یک ویژگی مهم متغیرهای تصادفی نرمال این است که اگر X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد، آن گاه $Y = \alpha X + \beta$ بطور نرمال با پارامترهای $\alpha\mu + \beta$ و $\alpha^2\sigma^2$ توزیع شده است. این مطلب واضح است، زیرا[۱] F_Y تابع توزیع تراکمی متغیر تصادفی Y، وقتی $\alpha > 0$ از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}
F_Y(a) &= P\{Y \le a\} \\
&= P\{\alpha X + \beta \le a\} \\
&= P\left\{X \le \frac{a-\beta}{\alpha}\right\} \\
&= F_X\left(\frac{a-\beta}{\alpha}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{[(a-\beta)/\alpha]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha\sigma} \exp\left\{-\frac{[y-(\alpha\mu+\beta)]^2}{2\alpha^2\sigma^2}\right\} dy \qquad (۱-۳)
\end{aligned}$$

که در آن معادله (۳-۱) با تغییر متغیر $y = \alpha x + \beta$ به دست آمده است. با وجود این، چون $F_Y(a) = \int_{-\infty}^{a} f_Y(y)dy$، ازمعادله (۳-۱)نتیجه می شودکه تابع چگالی احتمال Y، $f_Y(y)$، عبارت است از

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha\sigma} \exp\left\{-\frac{[y-(\alpha\mu+\beta)]^2}{2(\alpha\sigma)^2}\right\}$$

بنابراین Y دارای توزیع نرمال با پارامترهای $\alpha\mu + \beta$ و $(\alpha\sigma)^2$ است.

یک پیامد مهم از نتیجه قبل این است که اگر X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد، آن گاه $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ دارای توزیع نرمال با پارامترهای ۰ و ۱ است. می گوییم متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال **استاندارد** یا **واحد** است.

مرسوم است که تابع توزیع تراکمی یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد را با $\Phi(x)$ نشان دهند. یعنی

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy$$

---

۱ – وقتی بیش از یک متغیر تصادفی مورد مطالعه است، تابع توزیع تراکمی متغیر تصادفی Z را با F_Z و تابع چگالی آن را با f_Z نشان می دهیم.

مقادیر $\Phi(x)$ برای مقادیر نا منفی x در جدول ۵-۱ داده شده است. به ازای مقادیر منفی x ، $\Phi(x)$ را می‌توان از معادلهٔ (۳-۲) به دست آورد:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad -\infty < x < \infty \tag{۳-۲}$$

اثبات معادلهٔ (۳-۲) را که از تقارن چگالی نرمال استاندارد نتیجه می‌شود، به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم. این معادله بیانگر این است که اگر Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد، آن‌گاه

$$P\{Z \le -x\} = P\{Z > x\} \qquad -\infty < x < \infty$$

هرگاه X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد، $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ متغیر تصادفی نرمال استاندارد است، نتیجه می‌شود که تابع توزیع X را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P\{X \le a\} \\ &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

مثال ۳ الف. اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای $\mu = 3$ و $\sigma^2 = 9$ باشد، (۱) $P\{2 < X < 5\}$ ، (۲) $P\{X > 0\}$ و (۳) $P\{|X - 3| > 6\}$ را بیابید.

حل:

۱-

$$\begin{aligned} P\{2 < X < 5\} &= P\left\{\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right\} = P\left\{-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right] = .3779 \end{aligned}$$

۲-

$$\begin{aligned} P\{X > 0\} = P\left\{\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}\right\} &= P\{Z > -1\} \\ &= 1 - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) \\ &= .8413 \end{aligned}$$

۳-

$$P\{|X-3|>6\} = P\{X>9\} + P\{X<-3\}$$
$$= P\left\{\frac{X-3}{3} > \frac{9-3}{3}\right\} + P\left\{\frac{X-3}{3} < \frac{-3-3}{3}\right\}$$
$$= P\{Z>2\} + P\{Z<-2\}$$
$$= 1-\Phi(2)+\Phi(-2)$$
$$= 2[1-\Phi(2)]$$
$$= .0456$$

مثال ۳ ب. غالباً امتحانی را خوب ارزیابی می‌کنیم (به مفهوم تعیین پراکندگی معتبر برای نمرات شرکت کنندگان) اگر نمرات آزمون شرکت کنندگان در آن را بتوان با تابع چگالی نرمال تقریب کرد. (به بیان دیگر، نمودار فراوانی نمرات باید تقریباً به شکل زنگدیس چگالی نرمال باشد). غالباً ممتحن با استفاده از نمرات، پارامترهای μ و σ^2 توزیع نرمال را برآورد کرده و سپس نمرهٔ حرفی A را به کسانی که نمرهٔ آزمون آنها بزرگتر از $\mu+\sigma$، و نمرهٔ حرفی B را به آنهایی که نمره شان بین μ و $\mu+\sigma$ و C را به کسانی که نمره شان بین $\mu-\sigma$ و μ و D را به کسانی که نمره شان بین $\mu-2\sigma$ و $\mu-\sigma$ و F را به کسانی که نمره ای پایین تر از $\mu-2\sigma$ است نسبت می دهد. (که آن را گاهی رتبه بندی[3] بر روی منحنی[4] می نامند).

$$P\{X>\mu+\sigma\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}>1\right\} = 1-\Phi(1) = .1587$$
$$P\{\mu<X<\mu+\sigma\} = P\left\{0<\frac{X-\mu}{\sigma}<1\right\} = \Phi(1)-\Phi(0) = .3413$$
$$P\{\mu-\sigma<X<\mu\} = P\left\{-1<\frac{X-\mu}{\sigma}<0\right\}$$
$$= \Phi(0)-\Phi(-1) = .3413$$
$$P\{\mu-2\sigma<X<\mu-\sigma\} = P\left\{-2<\frac{X-\mu}{\sigma}<-1\right\}$$
$$= \Phi(2)-\Phi(1) = .1359$$
$$P\{X<\mu-2\sigma\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}<-2\right\} = \Phi(-2) = .0228$$

جدول ۵-۱

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

از این جا نتیجه می شود که تقریباً ۱۶ درصد کلاس نمرهٔ A ، ۳۴ درصد نمرهٔ B ، ۳۴ درصد نمرهٔ C و ۱۴ درصد نمره D کسب می کنند و ۲ درصد رد می شوند.

مثال ۳ پ. نظر کارشناسی در یک دادخواست پدری گواه برآن است که طول دورهٔ بارداری (به روز) (یعنی از زمان تلقیح تا تولد کودك) تقریباً دارای توزیع نرمال با پارامترهای $\mu = ۲۷۰$ و $\sigma^2 = ۱۰۰$ می باشد. خوانده در این دادخواست قادر است ثابت کند که در طی دوره ای که ۲۹۰ روز قبل از تولد کودك شروع شده است و ۲۴۰ روز قبل از این تولد پایان پذیرفته است در مسافرت بوده است . اگر خوانده، در حقیقت پدر این کودك باشد، احتمالی که این مادر دورهٔ بارداری بسیار طولانی یا کوتاهی، بنابر آنچه در گواهی نامه آمده است، داشته باشد چقدر است؟

حل : فرض کنید X طول دورهٔ بارداری را نشان می دهد و خوانده پدر کودك است . بنابراین احتمالی که این تولد در فاصله زمانی خاطر نشان شده رخ دهد برابر است با

$$\begin{aligned}
P\{X > 290 \text{ or } X < 240\} &= P\{X > 290\} + P\{X < 240\} \\
&= P\left\{\frac{X-270}{10} > 2\right\} + P\left\{\frac{X-270}{10} < -3\right\} \\
&= 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(3) \\
&= .0241
\end{aligned}$$

مثال ۳ ت. فرض کنید پیامی دوتائی را باید از مکان A به وسیلهٔ سیم به مکان B انتقال دهیم . با وجود این ، داده هایی که به سیم منتقل می شوند در معرض اختلال و آشفتگی کانال است و بنابراین به منظور امکان کاهش خطاوقتی پیام ۱ است مقدار ۲ و وقتی 0 است مقدار ۲- به سیم منتقل می شود، . اگر x ، $x = \pm 2$ ، مقدار ارسالی از مکان A باشد R مقداری که در مکان B دریافت می شود با $R = x + N$ داده می شود که در آن N اختلال و آشفتگی کانال است . وقتی پیام در مکان B دریافت می شود، گیرنده آن را بنا بر دستور زیر کشف رمز می کند .

اگر $R \geq 0.5$ ، آن گاه ۱ را نتیجه می گیریم

اگر $R < 0.5$ ، آن گاه 0 را نتیجه می گیریم

چون معمولاً آشفتگی کانال بطور نرمال توزیع شده است، احتمالهای خطا را وقتی N

یک متغیر تصادفی نرمال واحد باشد تعیین می کنیم .

دو نوع خطا وجود دارد کـه ممکن است رخ دهد : یکی این که از پیـام ۱ ممکن است به نادرستی 0 را نتیجه بگیریم و دیگری که 0 را به جای 1 بگیریم . نوع اول خطا وقتی رخ می دهد اگر پیام ، 1 و $2 + N < 0.5$ ، در صورتی که دومی اگر پیام 0 و $-2 + N > .5$ رخ می دهد . بنابراین

$$
\begin{aligned}
P\{\text{خطا} \mid \text{پیام ۱ است}\} &= P\{N < -1.5\} \\
&= 1 - \Phi(1.5) = .0668
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
P\{\text{خطا} \mid \text{پیام 0 است}\} &= P\{N \geq 2.5\} \\
&= 1 - \Phi(2.5) = .0062
\end{aligned}
$$

نامساوی زیر برای $\Phi(x)$ از لحاظ نظری مهم است

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2} \qquad \text{برای هر } x > 0 \tag{۳-۳}
$$

برای اثبات نا مساوی (۳-۳)، ابتدا نا مساوی واضح زیر را در نظر می گیریم

$$
(1 - 3y^{-4})e^{-y^2/2} < e^{-y^2/2} < (1 + y^{-2})e^{-y^2/2}
$$

که از آن نتیجه می شود

$$
\int_x^\infty (1 - 3y^{-4})e^{-y^2/2}\, dy < \int_x^\infty e^{-y^2/2}\, dy < \int_x^\infty (1 + y^{-2})e^{-y^2/2}\, dy \tag{۴-۳}
$$

با وجود این

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dy}[(y^{-1} - y^{-3})e^{-y^2/2}] &= -(1 - 3y^{-4})e^{-y^2/2} \\
\frac{d}{dy}[y^{-1}e^{-y^2/2}] &= -(1 + y^{-2})e^{-y^2/2}
\end{aligned}
$$

و از این رو، برای $x > 0$

$$-(y^{-1} - y^{-3})e^{-y^2/2}\Big|_x^\infty < \int_x^\infty e^{-y^2/2}\,dy < -y^{-1}e^{-y^2/2}\Big|_x^\infty$$

یا

$$(x^{-1} - x^{-3})e^{-x^2/2} < \int_x^\infty e^{-y^2/2}\,dy < x^{-1}e^{-x^2/2}$$

که معادلهٔ (۳-۳) را برقرار می کند.

همچنین از معادلهٔ (۳-۳) نتیجه می شود که برای x بزرگ

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

[نماد $a(x) \sim b(x)$ برای x بزرگ بدین معناست که $\lim_{x\to\infty} a(x)/b(x) = 1$].

۳-۱ تقریب نرمال برای توزیع دوجمله ای

قضیهٔ زیر به قضیه حدی دوموار ـ لاپلاس مشهور است. این قضیه ابتدا در حالت خاص $p = \frac{1}{2}$ توسط دوموار در سال ۱۷۳۳ ثابت شد و سپس در سال ۱۸۱۲ توسط لاپلاس برای هر p تعمیم داده شد.

قضیهٔ حدی دوموار ـ لاپلاس

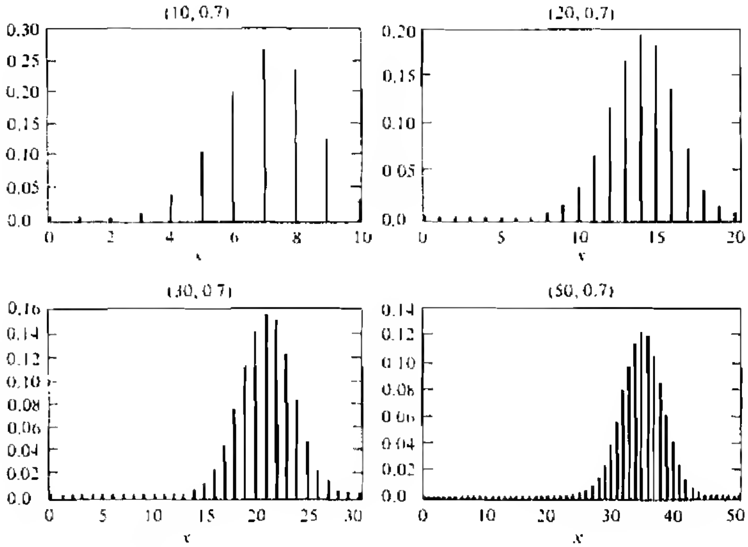
اگر S_n تعداد موفقیتها را که در n آزمایش مستقل هریک با احتمال موفقیت p انجام می شوند نمایش دهد، آن گاه برای هر $a < b$ ، وقتی $n \to \infty$

$$P\left\{a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right\} \to \Phi(b) - \Phi(a)$$

چون قضیهٔ بالا تنها حالت خاصی از قضیهٔ حد مرکزی است که در فصل ۸ ارائه خواهد شد، از اثبات آن خودداری می کنیم.

باید توجه داشت که اکنون ما دو تقریب برای احتمالهای دو جمله ای داریم: تقریب پواسن، که اگر n بزرگ و np مقدار متوسطی باشد تقریب خوبی می دهد و دیگری تقریب نرمال

است که می توان نشان داد هرگاه np (1 - p) بزرگ باشد کاملاً رضایت بخش است [عموماً، تقریب نرمال، برای مقادیر n که در $np(1-p) \geq 10$ صدق کنند کاملاً رضایت بخش است].



شکل ۵-۴ نشان می دهد که چگونه تابع جرم احتمال یك متغیر تصادفی دوجمله‌ای (n,p)، وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر می شود، بیش از پیش نرمال می‌شود

مثال ۳ ث. فرض کنید X تعداد دفعاتی باشد که یک سکهٔ منظم در ۴۰ پرتاب، خط می‌آید. احتمالی را که X برابر ۲۰ شود پیدا کنید. از تقریب نرمال استفاده کرده و آن را با جواب دقیق مقایسه کنید.

حل: چون دو جمله‌ای یک متغیر تصادفی گسسته و نرمال متغیر تصادفی پیوسته است، بهترین تقریب با نوشتن احتمال مطلوب به صورت زیر حاصل می شود.

$$
\begin{aligned}
P\{X = 20\} &= P\{19.5 < X < 20.5\} \\
&= P\left\{\frac{19.5 - 20}{\sqrt{10}} < \frac{X - 20}{\sqrt{10}} < \frac{20.5 - 20}{\sqrt{10}}\right\} \\
&= P\left\{-.16 < \frac{X - 20}{\sqrt{10}} < .16\right\} \\
&\approx \Phi(.16) - \Phi(-.16) = .1272
\end{aligned}
$$

نتیجهٔ دقیق عبارت است از

$$P\{X = 20\} = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{40}$$

که می توان نشان داد برابر است با ۰٫۱۲۶۸.

مثال ۳ ج. تعداد مطلوب یک کلاس سال اول در یک آموزشگاه بخصوص برابر ۱۵۰ دانشجو است. مدیریت آموزشگاه بنابر تجارب قبلی می داند که بطور متوسط تنها ۳۰ درصد از آنهایی که تقاضایشان، پذیرفته شده است در کلاس شرکت می کنند، خط مشی پذیرفتن ۴۵۰ تقاضا است. این احتمال را که بیش از ۱۵۰ دانشجوی سال اول در کلاس شرکت کنند محاسبه کنید.

حل: فرض کنید X تعداد دانشجویانی باشد که در کلاس شرکت می کنند، در این صورت X یک متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامتر $n = 450$ و $p = 0.3$ است. با استفاده از تقریب نرمال حاصل می شود.

$$\begin{aligned}P\{X \geq 150.5\} &= P\left\{\frac{X-(450)(.3)}{\sqrt{450(.3)(.7)}} \geq \frac{150.5-(450)(.3)}{\sqrt{450(.3)(.7)}}\right\} \approx 1-\Phi(1.59)\\ &= .0559\end{aligned}$$

بنابراین کمتر از ۶ درصد موارد بیش از ۱۵۰ دانشجو از ۴۵۰ نفر پذیرفته شده واقعاً شرکت می کنند (چه فرضهای استقلالی را در نظر گرفته ایم) ؟

مثال ۳ ج. به منظور تعیین تأثیر یک رژیم غذایی معین در کاهش مقدار کلسترول خون، ۱۰۰ نفر را تحت این رژیم غذایی قرار می دهند. پس از این که این افراد به مدت کافی تحت این رژیم بودند مقدار کلسترول آنها اندازه گیری می شود. کارشناسان تغذیه که این آزمایش را انجام می دهند تصمیم دارند که اگر حداقل ۶۵ درصد از افراد تحت این رژیم غذایی کاهش کلسترول داشته باشند آن را تأیید کنند. احتمالی که کارشناسان تغذیه این رژیم غذایی جدید را مورد تأکید قرار دهند، در حالی که واقعاً اثری بر سطح کلسترول ندارد، چقدر است؟

حل: فرض کنید اگر این رژیم هیچ اثری بر مقدار کلسترول نداشته باشد، در این صورت، دقیقاً بتصادف، مقدار کلسترول هر فرد با احتمال $\frac{1}{2}$ کمتر از مقداری خواهد

بود که قبل از رژیم غذایی داشته است. بنابراین، اگر X تعداد افرادی باشد که کلسترول آنها کاهش یافته است، آن گاه احتمالی که کارشناسان تغذیه این رژیم غذایی را مورد تأیید قرار دهند در حالی که واقعاً اثری در کاهش کلسترول ندارد عبارت است از

$$\begin{aligned}\sum_{i=65}^{100}\binom{100}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} &= P\{X \geq 64.5\}\\ &= P\left\{\frac{X-(100)(\frac{1}{2})}{\sqrt{100(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}} \geq 2.9\right\}\\ &\approx 1-\Phi(2.9)\\ &= .0019\end{aligned}$$

۴ - متغیرهای تصادفی نمایی

یک متغیر تصادفی پیوسته که تابع چگالی احتمال آن، برای $\lambda > 0$ معینی، به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \text{ و}\\ 0 & x < 0 \text{ و}\end{cases}$$

متغیر تصادفی **نمایی**، با پارامتر λ (یا به اختصار توزیع نمایی) نامیده می شود. تابع توزیع تراکمی یک متغیر تصادفی نمایی، $F(a)$، به صورت زیر است

$$\begin{aligned}F(a) &= P\{X \leq a\}\\ &= \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx\\ &= -e^{-\lambda x}\Big|_0^a\\ &= 1-e^{-\lambda a} \qquad a \geq 0\end{aligned}$$

توجه داشته باشید $F(\infty) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1$ همان طور که باید باشد. در فصل ۷ نشان خواهیم داد که این پارامتر λ برابر با عکس «مقدار متوسط» این متغیر تصادفی است.

توزیع نمایی غالباً در عمل پیش می آید زیرا توزیع مدت زمان برای رخ دادن پیشامد ویژه معینی است. برای مثال مدت زمان لازم (شروع از همین لحظه) تا رخ دادن یک زمین لرزه یا تا آغاز یک جنگ یا تا یک تلفن که به شما زده می شود و معلوم می شود که شماره اشتباه بوده است، همه متغیرهای تصادفی هستند که در عمل گرایش به توزیعهای نمایی دارند (برای توضیح نظری آن خواننده را به بخش ۵ از فصل ۴ و به ویژه مثال ۵ ب از این بخش ارجاع می دهیم).

مثال ۴ الف. فرض کنید طول مدت زمان یک مکالمهٔ تلفنی به دقیقه متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{10}$ است. اگر شخصی بلافاصله قبل از شما وارد باجهٔ تلفن عمومی شود، احتمالی را که شما (۱) بیش از ۱۰ دقیقه و (۲) بین ۱۰ و ۲۰ دقیقه باید منتظر باشید بیابید.

حل: فرض کنید X طول مدت زمان مکالمهٔ تلفنی فرد داخل باجه تلفن باشد، احتمالهای مطلوب عبارتند از:

$$P\{X > 10\} = \int_{10}^{\infty} \tfrac{1}{10} e^{-x/10}\, dx = -e^{-x/10} \Big|_{10}^{\infty} = e^{-1} \approx .368$$

$$P\{10 < X < 20\} = \int_{10}^{20} \tfrac{1}{10} e^{-x/10}\, dx = -e^{-x/10} \Big|_{10}^{20} = e^{-1} - e^{-2} \approx .233$$

می گوییم متغیر تصادفی نا منفی X **بدون حافظه** است اگر برای هر $s, t \geq 0$

$$P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\} \qquad s, t \geq 0 \tag{۴-۱}$$

اگر X را عمر یک دستگاه بپنداریم، معادلهٔ (۴-۱) بیانگر آن است که احتمال خراب نشدن این دستگاه به مدت لااقل s + t ساعت، در صورتی که قبلاً t ساعت کار کرده است، با احتمال اولیه ای که این دستگاه لااقل به مدت s ساعت کار کند یکسان است. به بیان دیگر، اگر این دستگاه در سن t درست باشد، توزیع بقیه مدت زمان که درست خواهد بود با توزیع عمر اصلی یکسان است (یعنی درست مثل این است که این دستگاه فراموش کرده است که قبلاً به مدت t ساعت مورد استفاده قرار گرفته است).

شرط (۴-۱) با

$$\frac{P\{X > s + t, X > t\}}{P\{X > t\}} = P\{X > s\}$$

یا

$$P\{X > s + t\} = P\{X > s\}P\{X > t\} \tag{۴-۲}$$

هم ارز است. چون معادلهٔ (۴-۲) وقتی X دارای توزیع نمایی است برقرار است (زیرا $e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s - \lambda t}$) نتیجه می شود که متغیرهای تصادفی نمایی بدون حافظه اند.

مثال ۴ ب. باجهٔ پستی را در نظر بگیرید که دو کارمند دارد. فرض کنید وقتی آقای اسمیت وارد باجه می شود متوجه می شود که خانم جونز را یکی از کارمندان و آقای براون را کارمنددیگری درحال پاسخ گویی است. همچنین فرض کنید به آقای اسمیت گفته شده است که پاسخ گویی به او به محض این که جونز یا براون باجه راترك کنند آغازخواهدشد. اگرمدت زمانی که یک کارمندبرای یک متقاضی صرف می کنددارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد، احتمال این که از این سه متقاضی، آقای اسمیت آخرین نفری باشد که باجه را ترك می کند، چقدر است؟

حل: پاسخ با استدلال زیر به دست می آید: زمانی را در نظر بگیرید که آقای اسمیت ابتدا یک کارمند بیکار پیدا می کند، درست در این لحظه خانم جونز یا آقای براون باجه را ترك کرده و دیگری هنوز در باجه است. با وجود این، به سبب فقدان حافظه توزیع نمایی، نتیجه می شود مدت زمان اضافی که این فرد دیگر (جونز یا براون) بایستی هنوز در اداره پست بگذراند دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است. یعنی، درست مثل این است که پاسخ گویی به این فرد در همین لحظه شروع شده باشد. بنابراین، طبق تقارن، احتمالی که فرد باقیمانده قبل از اسمیت باجه را ترك کند، باید برابر $\frac{1}{2}$ باشد.

معلوم می شود که نه تنها توزیع نمایی بدون حافظه است، بلکه تنها توزیعی نیز می باشد که دارای این خاصیت است. برای درك این مطلب، فرض کنید X بدون حافظه است و بگذارید $\bar{F}(x) = P\{X > x\}$. در این صورت، بنابر معادلهٔ (۴-۳)، نتیجه می شود.

$$\bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t)$$

یعنی، $\bar{F}(.)$ در معادلهٔ تابعی[1]

۱- معادلهٔ (۴-۳) به صورت زیر نتیجه می شود: اگر $g(s+t) = g(s)\,g(t)$، آن گاه

$$g\left(\frac{2}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) = g^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

و از تکرار آن نتیجه می شود $g(m/n) = g^m(1/n)$. همچنین

$$g(1) = g\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = g^n\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{or} \quad g\left(\frac{1}{n}\right) = (g(1))^{1/n}$$

بنابراین، $g(\frac{m}{n}) = (g(1))^{\frac{m}{n}}$ که چون g پیوسته از راست است، نتیجه می دهد $g(x) = (g(1))^x$. چون $g(1) = (g(\frac{1}{2}))^2$، داریم $g(x) = e^{-\lambda x}$ که در آن $\lambda = -\log(g(1))$.

$$g(s+t) = g(s)g(t)$$

صدق می کند. با این وجود، معلوم است که تنها جواب پیوسته از راست این معادله تابعی عبارت است از

$$g(x) = e^{-\lambda x} \qquad (۴-۳)$$

و چون یک تابع توزیع همواره پیوسته از راست است، باید داشته باشیم

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x} \quad \text{یا} \quad F(x) = P\{X \le x\} = 1 - e^{-\lambda x}$$

که نشان می دهد X بطور نمایی توزیع شده است.

مثال ۴ پ. فرض کنید مسافتی که یک خودرو قبل از فرسوده شدن باتری می تواند بپیماید، دارای توزیع نمایی با مقدار متوسط ۱۰۰۰۰ مایل است. اگر شخصی بخواهد به یک سفر ۵۰۰۰ مایلی برود، احتمالی که سفرش را بدون تعویض باتری خودرو به پایان برساند چقدر است؟ اگر توزیع نمایی نباشد چه می توان گفت؟

حل: بنابر ویژگی بدون حافظه بودن توزیع نمایی نتیجه می شود که عمر باقیمانده باتری (به هزار مایل) نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{10}$ است. بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$P\{\text{باقیمانده عمر باتری} > 5\} = 1 - F(5) = e^{-5\lambda} = e^{-1/2} \approx .604$$

با وجود این، اگر F توزیع عمر باتری نمایی نباشد، آن گاه احتمال مناسب عبارت است از

$$P\{\text{عمر باتری} > t + 5 \mid \text{عمر باتری} > t\} = \frac{1 - F(t+5)}{1 - F(t)}$$

که در آن t تعداد مایلهایی است که باتری قبل از آغاز مسافرت مورد استفاده بوده است. بنابراین، اگر توزیع نمایی نباشد، قبل از آن که احتمال مطلوب را بتوان محاسبه کرد به اطلاعات اضافی (مثلاً t) نیاز است.

گونه ای از توزیع نمایی، توزیع یک متغیر تصادفی است که مثبت یا منفی بودن آن هم احتمال است و مقدار قدر مطلق آن دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda \ge 0$ است. گوییم این متغیر تصادفی دارای توزیع **لاپلاسی**[1] است و چگالی آن با رابطهٔ زیر بیان می شود

۱ـ گاهی نیز متغیر تصادفی نمایی دوگانه نامیده می شود.

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0$$
$$\tfrac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}, \qquad x < 0$$
$$= \tfrac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}, \qquad -\infty < x < \infty$$

تابع توزیع آن با رابطهٔ زیر داده شده است .

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \lambda e^{\lambda x}\,dx, & x < 0 \\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \lambda e^{\lambda x}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x}\,dx, & x > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

مثال ۴ ت. مثال ۳ ت را که فرض می کندقرار است پیام دوتایی از A به B ارسال شود، (که وقتی پیام ۱ است ۲ و وقتی ۰ است ۲- ارسال می شود)، دو باره در نظر می گیریم. با این وجود، اکنون فرض کنید به جای متغیر تصادفی نرمال استاندارد N اختلال و آشفتگی کانال، متغیر تصادفی لاپلاسی با پارامتر $\lambda = 1$ است. باز هم فرض کنید اگر R مقدار دریافت شده در مکان B باشد، آن گاه این پیام به صورت زیر کشف رمز می شود:

اگر $R \geq 0.5$ ، آن گاه 1 را نتیجه می گیریم

اگر $R < 0.5$ ، آن گاه 0 را نتیجه می گیریم

در این حالت (یعنی وقتی آشفتگی لاپلاسی با پارامتر $\lambda = 1$ است) ۲ نوع خطا دارای احتمالهای زیرند:

$$P\{\text{خطا} \mid \text{پیام 1 فرستاده شده است}\} = P\{N < -1.5\} = \tfrac{1}{2}e^{-1.5} = .1116$$

$$P\{\text{خطا} \mid \text{پیام 0 فرستاده شده است}\} = P\{N \geq 2.5\} = \tfrac{1}{2}e^{-2.5} = .041$$

بنابراین، با مقایسه این مقادیر با جوابهای مثال ۳ ت ، در می یابیم که احتمالهای خطا وقتی آشفتگی لاپلاسی با پارامتر $\lambda = 1$ است از زمانی که آشفتگی یک متغیر تصادفی نرمال واحد است بزرگتراند (چنان که در فصل ۷ نشان خواهیم داد، هر دوی این متغیرهای تصادفی دارای

مقدار متوسط 0 و میانگین مربعات انحراف از 0 تا ۱ می باشند) .

۴-۱ تابع نرخ خرابی

متغیر تصادفی مثبت و پیوستهٔ X را به عنوان طول عمر قطعهٔ معینی با تابع توزیع F و چگالی f در نظر می گیریم $\lambda(t)$ تابع نرخ خرابی F با

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \qquad \bar{F} = 1 - F$$

تعریف می شود. به منظور تعبیر و تفسیر $\lambda(t)$ ، فرض کنید که قطعه ای به مدت t ساعت کار کرده است و ما احتمالی را که این قطعه مدت زمان اضافی dt به کار ادامه ندهد را می خواهیم. یعنی $P\{X \in (t, t+dt) | X > t\}$ را در نظر می گیریم. اکنون

$$\begin{aligned} P\{X \in (t, t+dt) | X > t\} &= \frac{P\{X \in (t, t+dt), X > t\}}{P\{X > t\}} \\ &= \frac{P\{X \in (t, t+dt)\}}{P\{X > t\}} \\ &\approx \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}\, dt \end{aligned}$$

یعنی $\lambda(t)$ نرخ احتمال شرطی قطعه ای را که t واحد زمان از عمر آن گذشته ، نشان می دهد .

اکنون فرض کنید توزیع طول عمر نمایی باشد. در این صورت بنابر ویژگی بدون حافظه بودن نتیجه می شود که توزیع عمر باقیمانده برای یک قطعه t ساله با عمر یک قطعه جدید یکسان است . بنابراین $\lambda(t)$ باید ثابت باشد که می توان آن را تحقیق کرد، زیرا

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

بنابراین تابع نرخ خرابی توزیع نمایی ثابت است. پارامتر λ را غالباً نوخ این توزیع می نامند .

معلوم می شود که تابع نرخ خرابی $\lambda(t)$ ، توزیع F را بطور یکتا تعیین می کند. برای اثبات آن توجه داشته باشید که بنا به تعریف

$$\lambda(t) = \frac{\frac{d}{dt}F(t)}{1 - F(t)}$$

با انتگرال گیری از طرفین حاصل می شود

$$\log(1 - F(t)) = -\int_0^t \lambda(t)\, dt + k$$

یا

$$1 - F(t) = e^k \exp\left\{-\int_0^t \lambda(t)\, dt\right\}$$

با قرار دادن $t = 0$ ، نتیجه می شود $k = 0$ و بنابراین

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t \lambda(t)\, dt\right\} \qquad (۴-۴)$$

بنابراین می توان تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته مثبتی را با داشتن تابع نرخ خرابی آن مشخص کرد. برای مثال، اگر متغیری تصادفی دارای تابع نرخ خرابی خطی باشد. یعنی اگر

$$\lambda(t) = a + bt$$

آن گاه تابع توزیع آن با رابطهٔ زیر داده می شود

$$F(t) = 1 - e^{-at - bt^2/2}$$

و با مشتق گیری از آن معلوم می شود که چگالی آن عبارت است از

$$f(t) = (a + bt)e^{-(at + bt^2/2)}, \qquad t \geq 0$$

هرگاه $a = 0$ ، تابع فوق به تابع چگالی رایله مشهور است.

مثال ۴ ت : غالباً شنیده می شود که نرخ مرگ افراد معتاد به سیگار، در هر سنی، دو برابر نرخ مرگ افراد غیرمعتادبه سیگار است. معنی این عبارت چیست؟ آیا به این معناست که احتمال زنده ماندن یک فرد غیرسیگاری به تعداد سالهای معینی دوبرابر یک فردسیگاری هم سن اوست؟

حل : اگر $\lambda_s(t)$ نرخ مرگ یک فرد سیگاری t ساله و $\lambda_n(t)$ نرخ مرگ یک غیر سیگاری

t ساله باشد، آن گاه مطلب فوق هم ارز با گزارهٔ زیر است

$$\lambda_s(t) = 2\lambda_n(t).$$

احتمالی که یک فرد غیر سیگاری A ساله تا سن B زنده بماند، $A < B$، عبارت است از

$$P\{\text{فردغیرسیگاری } A \text{ ساله به سن} B \text{ سالگی برسد}\} = P\{\text{طول عمرغیرسیگاریها} > B \mid \text{طول عمرغیرسیگاریها} > A\}$$

$$= \frac{1 - F_{\text{non}}(B)}{1 - F_{\text{non}}(A)}$$

از (۴-۴)

$$= \frac{\exp\left\{-\int_0^B \lambda_n(t)\,dt\right\}}{\exp\left\{-\int_0^A \lambda_n(t)\,dt\right\}}$$

$$= \exp\left\{-\int_A^B \lambda_n(t)\,dt\right\}$$

در حالی که احتمال متناظر برای یک فرد سیگاری، با استدلالی نظیر آن، برابر است با

$$P\{\text{یک فرد سیگاری } A \text{ ساله به سن } B \text{ سالگی برسد}\} = \exp\left\{-\int_A^B \lambda_s(t)\,dt\right\}$$

$$= \exp\left\{-2\int_A^B \lambda_n(t)\,dt\right\}$$

$$= \left[\exp\left\{-\int_A^B \lambda_n(t)\,dt\right\}\right]^2$$

به بیان دیگر، از دو فرد هم‌سن که یکی از آنها سیگاری و دیگری غیر سیگاری است، احتمالی که این فرد سیگاری تا سن معینی زنده بماند برابر **با توان دوم** (و نه نصف) احتمال متناظر برای یک فرد غیرسیگاری است. برای مثال، اگر $\lambda_n(t) = \frac{1}{30}$، $50 \le t \le 60$، آن گاه احتمالی که یک فردغیرسیگاری ۵۰ ساله به سن ۶۰ سالگی برسدبرابر با $e^{-\frac{1}{3}} = 0.7165$ است، درحالی که احتمال متناظر برای فرد سیگاری برابر $e^{-\frac{2}{3}} = 0.5134$ است.

۵ - توزیعهای پیوسته دیگر

۵-۱ توزیع گاما

می گوییم یک متغیر تصادفی دارای توزیع گاما با پارامترهای (λ, t)، $\lambda > 0$ و $t > 0$ می باشد، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t-1}}{\Gamma(t)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

که در آن

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-y} y^{t-1}\, dy$$

با انتگرال گیری با روش جزء به جزء از $\Gamma(t)$ داریم

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= -e^{-y}y^{t-1}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-y}(t-1)y^{t-2}\, dy \\ &= (t-1)\int_0^\infty e^{-y}y^{t-2}\, dy \\ &= (t-1)\Gamma(t-1) \end{aligned} \tag{۱-۵}$$

مقدار انتگرال برای t ، مثلاً $t = n$ ، با اعمال (۵-۱) بطور مکرر داریم

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\ &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= \cdots \\ &= (n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2\Gamma(1) \end{aligned}$$

چون $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$ ، نتیجه می شود که مقادیر انتگرال برای n عبارت است از

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

وقتی t عدد صحیح مثبتی مثلاً $t = n$ است، توزیع گاما با پارامترهای (t, λ) غالباً درعمل به‌عنوان توزیع مدت زمانی که فردی باید منتظر بماند تا کلاً n پیشامد رخ دهد، پیش می آید. بطور دقیقتر، اگر پیشامدها قرار باشد در طول زمان و بر طبق سه اصل موضوعی بخش ۵، فصل ۴ رخ دهند، آن گاه معلوم می شود مدت زمانی که فردی باید انتظار بکشد تا کلاً n پیشامد رخ دهد، یک توزیع گاما با پارامترهای (n, λ) می باشد. برای اثبات، فرض کنید T_n زمانی را که پیشامد nام رخ می دهد نشان دهد و توجه داشته باشید که T_n کوچکتر یا برابر t است اگر و تنها اگر تعداد پیشامدهایی که تا زمان t رخ داده است، حداقل برابر n باشد. یعنی، اگر $N(t)$ برابر تعداد پیشامدها در $[0, t]$ باشد، داشته باشیم

$$P\{T_n \le t\} = P\{N(t) \ge n\}$$
$$= \sum_{j=n}^{\infty} P\{N(t) = j\}$$
$$= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$$

که درآن تساوی اخیر، باتوجه به این که تعداد پیشامدهادر $[0, t]$ دارای توزیع پواسن با پارامتر λt است، نتیجه شده است. بامشتق گیری ازرابطهٔ فوق، تابع چگالی T_n به صورت زیر حاصل می شود

$$f(t) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} j(\lambda t)^{j-1}\lambda}{j!} - \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$$
$$= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} - \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$$
$$= \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

بنابراین T_n دارای توزیع گاما با پارامترهای (n, λ) است. (به این توزیع در کتب آماری توزیع n- ارلانگ نیز اطلاق می شود) توجه داشته باشیدکه برای $n = 1$ ، این توزیع به نمائی تبدیل می شود.

توزیع گاما با $\lambda = \frac{1}{2}$ و $t = \frac{n}{2}$ (n عدد صحیح و مثبت است) توزیع χ_n^2 (بخوانید خی دو یا کی دو) با n درجهٔ آزادی خوانده می شود. توزیع χ^2 در عمل غالباً به عنوان توزیع خطا، وقتی سعی می شود که در فضای n بعدی به هدفی اصابت شود و هر مؤلفه خطا دارای توزیع نرمال است، پیش می آید. این توزیع را در فصل (۶) مورد مطالعه قرار می دهیم و در آن جا به جزئیات رابطهٔ آن با توزیع نرمال خواهیم پرداخت.

۵-۲ توزیع وایبل

توزیع وایبل به علت انعطاف پذیریش در حرفهٔ مهندسی بطور گسترده ای به کار می رود. در اصل ، این توزیع برای تعبیر داده های فرسودگی پیشنهاد شد، ولی اکنون استفاده از آن به بسیاری از دیگر مسائل مهندسی، گسترش یافته است. بویژه، این توزیع در زمینهٔ پدیده های طول عمر، نظیر توزیع طول عمر دستگاه معینی، بخصوص وقتی الگوی «ضعیفترین حلقه» برای این دستگاه مناسب باشد، کاربرد دارد. یعنی، دستگاهی را که مرکب از بسیاری قطعات است در نظر بگیرید و فرض کنید که این دستگاه وقتی هریک از قطعاتش خراب شود،

از کار باز می ماند و تحت این شرایط (هم بطور نظری و هم بطور عملی) نشان داده شده است که توزیع وایبل تقریب خوبی برای توزیع طول عمر این قطعه فراهم می کند.

تابع توزیع وایبل به شکل زیر است

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le v \\ 1 - \exp\left\{ -\left(\dfrac{x-v}{\alpha}\right)^{\beta} \right\} & x > v \end{cases} \tag{۵ - ۲}$$

یک متغیر تصادفی که تابع توزیع تراکمی آن با معادله (۵-۲) داده شده باشد، متغیر تصادفی وایبل با پارامتر v ، α و β نامیده می شود. با مشتق گیری چگالی آن به دست می آید.

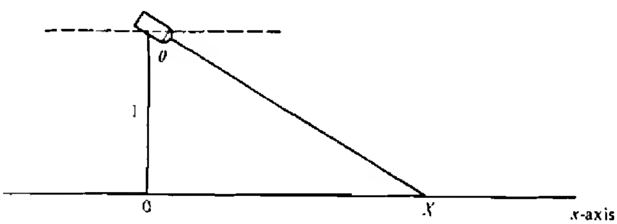
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le v \\ \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\left(\dfrac{x-v}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{ -\left(\dfrac{x-v}{\alpha}\right)^{\beta} \right\} & x > v \end{cases}$$

۵-۳ توزیع کوشی

گوییم یک متغیر تصادفی دارای توزیع کوشی با پارامتر θ ، $-\infty < \theta < \infty$ ، است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{[1 + (x-\theta)^2]} \qquad -\infty < x < \infty$$

مثال ۵ الف. فرض کنید پرتو باریک چراغ قوه ای حول مرکز خودش می چرخد که به فاصلهٔ یک واحد از محور x ها قرار دارد (شکل ۵-۴). وقتی چراغ قوه از چرخش باز می ایستد، نقطهٔ X را که پرتو آن محور x ها را قطع می کند در نظر بگیرید. (اگر پرتو متوجه محور x ها نبود، آزمایش را تکرار کنید).



شکل ۵-۵

چنان که در شکل ۵-۵ نشان داده شده است، نقطهٔ X با زاویه بین چراغ قوه و محور yها θ تعیین می شود که از نظر فیزیکی روشن است بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ دارای توزیع یکنواخت است. بنابر این تابع توزیع X با رابطهٔ زیر داده می شود.

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X \le x\} \\ &= P\{\tan\theta \le x\} \\ &= P\{\theta \le \tan^{-1} x\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1} x \end{aligned}$$

که در آن تساوی اخیر از

$$P\{\theta \le a\} = \frac{a - (-\pi/2)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{a}{\pi}, \qquad -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$$

به دلیل یکنواخت بودن θ بر $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$، نتیجه می شود.

بنابراین تابع چگالی X با رابطهٔ

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad -\infty < x < \infty$$

داده می شود و می بینیم که X دارای توزیع کوشی است[1].

۱- برابری $\frac{d}{dx}\mathrm{tg}^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$ را می توان به صورت زیر نشان داد: اگر $y = \mathrm{tg}^{-1}x$، آن گاه $\mathrm{tg}\, y = x$ و بنابراین

$$\begin{aligned} 1 = \frac{d}{dx}(\tan y) &= \frac{d}{dy}(\tan y)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)\frac{dy}{dx} \\ &= \left(\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}\right)\frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{x^2+1}$$

۵-۴ توزیع بتا

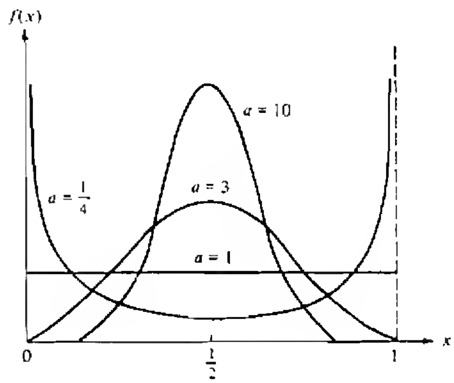
گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع بتاست اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن

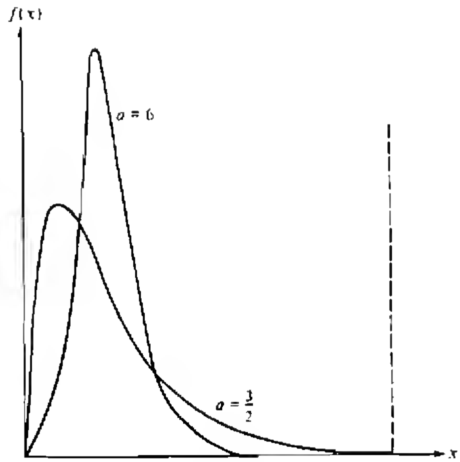
$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

توزیع بتا را می توان برای پدیده ای تصادفی که مجموعهٔ مقادیر آن درفاصله معین [c, d] است الگو قرار داد که این فاصله، اگر c مبدأ را نشان دهد و d - c را واحد اندازه گیری بگیریم به فاصله [0 , 1] تبدیل می شود.



شکل ۵-۶ چگالیهای بتا با پارامترهای (a, b) وقتی a = b

وقتی a = b ، چگالی بتا نسبت به $\frac{1}{2}$ متقارن است و وقتی مقدار مشترک a صعود می کند، وزنهٔ بیشتر و بیشتری به نواحی اطراف $\frac{1}{2}$ می دهد (شکل ۵-۶) . وقتی b > a چگالی آن به سمت چپ چاوله است (با این مفهوم که مقادیر کوچک احتمال بیشتری دارند) و وقتی a > b ، به سمت راست چاوله است (شکل ۵-۷) .



شکل ۵-۷ چگالیهای بتا با پارامترهای $(a\,,\,b)$ وقتی $\frac{a}{a+b}=\frac{1}{20}$

۶- توزیع تابعی از یك متغیر تصادفی

غالباً پیش می‌آید که توزیع احتمال یک متغیر تصادفی معلوم است و ما به تعیین توزیع تابعی معین از آن توجه داریم. برای مثال، فرض کنید که توزیع X معلوم است و می‌خواهیم توزیع $g(X)$ را پیدا کنیم. برای انجام این کار، لازم است پیشامد $g(X) \le y$ را بر حسب این که X در مجموعهٔ معینی باشد بیان کنیم. مطلب را با مثالهای زیر شرح می‌دهیم.

مثال ۶الف. فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت بر $(0,1)$ باشد. توزیع متغیر تصادفی Yرا که با $Y = X^n$ تعریف شده است، به صورت زیر به دست می‌آوریم: برای $0 \le y \le 1$.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \le y\} \\ &= P\{X^n \le y\} \\ &= P\{X \le y^{1/n}\} \\ &= F_X(y^{1/n}) \\ &= y^{1/n} \end{aligned}$$

پس تابع چگالی Y با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\, y^{-[(n-1)/n]} & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مثال ۶ ب. اگر X متغیر تصادفی پیوسته با چگالی احتمال f_X باشد، توزیع $Y = X^2$ به صورت زیر حاصل می‌شود: برای $y \geq 0$ ،

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\ &= P\{X^2 \leq y\} \\ &= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

که با مشتق گیری حاصل می‌شود

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]$$

مثال ۶ پ. اگر X دارای چگالی احتمال f_X باشد، آن‌گاه $Y = |X|$ دارای یک تابع چگالی است که به صورت زیر حاصل می‌شود: برای $y \geq 0$ ،

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\ &= P\{|X| \leq y\} \\ &= P\{-y \leq X \leq y\} \\ &= F_X(y) - F_X(-y) \end{aligned}$$

بنابراین، با مشتق گیری حاصل می‌شود

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) \qquad y \geq 0$$

روشهای به کار رفته در مثالهای ۶ الف تا ۶ پ را می‌توان برای اثبات قضیه ۶-۱ به کار برد.

قضیهٔ ۶-۱

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f_X است. فرض کنید $g(x)$ تابعی اکیداً یکنوا (صعودی یا نزولی) مشتق پذیر (و بنابراین پیوسته) از x است. در این صورت متغیر تصادفی Y که با $Y = g(X)$ تعریف شده است دارای یک تابع چگالی به صورت زیر است.

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)]\left|\dfrac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| & \text{اگر برای } x \text{ معینی } y = g(x) \\ 0 & \text{اگر برای هر } x \text{ ، } y \neq g(x) \end{cases}$$

که در آن $g^{-1}(y)$ برابر با آن مقداری از x تعریف می شود که در $g(x) = y$ صدق می کند.
اثبات قضیهٔ ۶-۱ را به عنوان تمرین رها می کنیم.

تمرینات نظری

۱- برای حکم زیر مثال نقضی ارائه دهید: اگر برای هر $0 < a < 1$ ، $P(E_a) = 1$ ، آن گاه $P\left(\bigcap_a E_a\right) = 1$ ، که در آن اشتراك بر روی کلیه $a \in (0, 1)$ است.

راهنمایی : فرض کنید X بر (0,1) بطور یکنواخت توزیع شده است. E_a را بر حسب X تعریف کنید.

۲- سرعت یک ملکول در یک گاز یکنواخت در حال تعادل متغیری تصادفی است که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است

$$f(x) = \begin{cases} ax^2e^{-bx^2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

که در آن $b = m/2kT$ و m , T, k بترتیب ثابت بالتزمن ، درجه حرارت مطلق و جرم ملکول را نمایش می دهند. a را بر حسب b محاسبه کنید.

۳- معادلهٔ (۳-۲) را ثابت کنید.

۴- اگر Z یک متغیر تصادفی نرمال واحد باشد، نشان دهید برای هر $a > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P\{Z \geq x + a/x\}}{P\{Z \geq x\}} = e^{-a}$$

۵- میانهٔ یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع F مقداری مانند m است که در $F(m) = \frac{1}{2}$ صدق کند، یعنی، احتمال این که یک متغیر تصادفی بزرگتر از میانه اش باشد با احتمالی که از آن کوچکتر باشد برابر است. مطلوب است میانهٔ X اگر X

(الف) بر (a , b) بطور یکنواخت توزیع شده باشد.

(ب) نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد.

(پ) نمایی با نرخ λ باشد.

۶- نمای یک متغیر تصادفی پیوسته X مقداری از x است که برای آن f (x) به ماگزیمم خود برسد. نمای x را در حالتهای (الف) (ب) و (پ) تمرین نظری ۵ ، محاسبه کنید.

۷- اگر X یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ و $c > 0$ باشد، نشان دهید که cX نمایی با پارامتر $\frac{\lambda}{c}$ است.

۸ - اگر X دارای توزیع یکنواخت بر $(0, a)$ باشد تابع نرخ خرابی X را محاسبه کنید.

۹ - اگر X دارای تابع نرخ خرابی $\lambda_X(t)$ باشد، تابع نرخ خرابی aX را محاسبه کنید، a عددی ثابت و مثبت است.

۱۰- تحقیق کنید که انتگرال تابع چگالی احتمال گاما برابر ۱ می شود

۱۱- $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ را برای $n = 1, 2, \ldots$ محاسبه کنید.

۱۲- تابع نرخ خرابی یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای (λ, t) را محاسبه کرده و نشان دهید که این تابع برای $t > 1$ صعودی و برای $t \le 1$ نزولی است.

۱۳- تابع نرخ خرابی یک متغیر تصادفی وایبل را محاسبه کرده و نشان دهید که برای $\beta \ge 1$ صعودی و برای $\beta \le 1$ نزولی است.

۱۴- نشان دهید نمودار $\log(\log(1 - F(x))^{-1})$ در مقابل $\log x$ یک خط راست با ضریب زاویه β است هرگاه $F(.)$ تابع توزیع وایبل باشد. همچنین نشان دهید که تقریباً ۶۳/۲ درصد تمام مشاهدات از این توزیع کمتر از α است. v را برابر صفر فرض کنید.

۱۵- قرار می دهیم

$$Y = \left(\frac{X - v}{\alpha}\right)^{\beta}$$

نشان دهید که اگر X متغیر تصادفی وایبل با پارامترهای v، α، β باشد، آن گاه Y یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ است و بالعکس

۱۶- نشان دهید

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}$$

۱۷- اگر X دارای توزیع یکنواخت بر (a, b) باشد، کدام متغیر تصادفی، که دارای رابطه ای خطی با X است، بطور یکنواخت بر $(0,1)$ توزیع شده است؟

۱۸- توزیع بتا با پارامترهای (a,b) را در نظر بگیرید. نشان دهید:

(الف) هرگاه $a > 1$، $b > 1$، چگالی یک نمایی است (یعنی دارای نمای یکتاست) که برابر است با $\frac{a - 1}{a + b - 2}$.

(ب) هرگاه $a \le 1$ ، $b \le 1$ ، $a + b < 2$ ، چگالی یا یک نمایی است که نما در 0 یا 1 است یا U شکل است با نماهایی هم در 0 و هم در 1 .

(پ) هرگاه $a = b = 1$ ، کلیه نقاط در $[0,1]$ نما هستند .

۱۹- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع تراکمی F است. متغیر تصادفی Y را با $Y = F(X)$ تعریف کنید. نشان دهید که Y بر $(0 , 1)$ بطور یکنواخت توزیع شده است.

۲۰- فرض کنید X دارای چگالی احتمال f_X است. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y را که با $Y = aX + b$ تعریف شده است بیابید.

۲۱- تابع چگالی احتمال $Y = e^X$ را، هرگاه X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد، بیابید. می گوییم متغیر تصادفی Y دارای توزیع لگ نرمال با پارامترهای μ و σ^2 است (زیرا $\log Y$ دارای توزیع نرمال است).

۲۲ - قضیهٔ ۶-۱ را ثابت کنید.

۲۳- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقلند که احتمال برابربودن آنها با 1 ، 2 ، ... ، $(10)^N$ یکسان است، که در آن N بسیار بزرگ است. فرض کنید D بزرگترین مقسوم علیه مشترك X و Y را نمایش می دهد و $Q_k = P\{D = k\}$.

(الف) دلیل ساده ای برای این که $Q_k = \dfrac{1}{k^2}Q_1$ ، بیاورید.

راهنمایی : توجه داشته باشید برای این که D برابر K شود ، k باید X و Y را بشمارد و همچنین X / k و Y / k باید نسبت به هم اول باشند. (یعنی باید آنها دارای بزرگترین مقسوم علیه مشترك ۱ باشند).

(ب) با استفاده از (الف) نشان دهید که

$$Q_1 = P\{\text{X و Y نسبت به هم اول باشند}\} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k^2}$$

می دانیم که $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ و از این رو $Q_1 = \dfrac{6}{\pi^2}$ (درنظریه اعدادآن را قضیه لژاندر می نامند) .

(پ) اکنون استدلال کنید

$$Q_1 = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{P_i^2 - 1}{P_i^2}\right),$$

که در آن P_i ، کوچکترین عدد اول i ام بزرگتر از ۱ است.

راهنمایی : X و Y نسبت به هم اولند اگر دارای هیچ عاملهای اول مشترک نباشند.
بنابراین ، از (ب)، دیده می شود که $\prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{P_i^2 - 1}{P_i^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}$ ، که در مسأله ۱۱ فصل ۴ بدون توضیح موردتوجه قراردادیم. (رابطه بین این مسأله و مسأله ۱۱ درفصل ۴ عبارت است از این که X و Y نسبت به هم اولند اگر XY دارای هیچ مضربی از عاملهای اول نباشد).

مسائل

۱- فرض کنید X متغیری تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(الف) مقدار c کدام است؟

(ب) تابع توزیع تراکمی X کدام است؟

۲- سیستمی مرکب از یک واحد اصلی و یک واحد فرعی می تواند تا مدت زمان تصادفی X کار کند. اگر چگالی X (به ماه) به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} Cxe^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

احتمالی که این دستگاه حداقل به مدت ۵ ماه کار کند چقدر است؟

۳- تابع

$$f(x) = \begin{cases} C(2x - x^3) & 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

را در نظر می گیریم. آیا f می تواند تابع چگالی احتمال باشد؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، c را تعیین کنید. اگر f (x) به صورت زیر باشد مسأله را تکرار کنید

$$f(x) = \begin{cases} C(2x - x^2) & 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۴- تابع چگالی احتمال X عمر وسیله الکترونیکی از نوع معین (به ساعت) با تابع زیر داده شده است

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{x^2} & x > 10 \\ 0 & x \leq 10 \end{cases}$$

(الف) $P\{X > 20\}$ را بیابید.

(ب) تابع توزیع تراکمی X چیست؟

(ج) احتمالی که از ۶ وسیله از این نوع حداقل سه وسیله به مدت حداقل ۱۵ ساعت کار کند چقدر است؟ چه فرضهایی را در نظر می گیرید.

۵- به یک جایگاه بنزین هفته ای یک بار بنزین تحویل داده می شود. اگر حجم فروش هفتگی آن برحسب هزار گالن متغیری تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} 5(1 - x)^4 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

گنجایش مخزن بنزین چقدر باید باشد تا احتمالی که ذخیرهٔ بنزین در هفته ای مفروض تمام شود برابر ۰/۰۱ باشد.

۶- قطارهای عازم مقصد A ، به فاصله های زمانی ۱۵ دقیقه، با شروع از ساعت ۷ صبح، و قطارهای عازم مقصد B به فاصله های زمانی ۱۵ دقیقه با شروع از ساعت ۵ : ۷ صبح وارد ایستگاه می شوند. اگر یک مسافر معینی در زمانی که بین ۷ و ۸ صبح یکنواخت توزیع شده است وارد ایستگاه شده و سوار اولین قطاری شود که از راه می رسد، چه نسبتی از موارد او به مقصد A می رود؟ اگر این مسافر در زمانی که بین ۱۰ : ۷ و ۱۰ : ۸ صبح یکنواخت توزیع شده است وارد ایستگاه شود این نسبت چقدر است؟

۷- نقطه ای بتصادف بر روی پاره خطی به طول L انتخاب می شود. این گزاره را تعبیر کرده و احتمالی را که نسبت پاره خط کوتاهتر به پاره خط طویلتر کمتر از $\frac{۱}{۴}$ باشد پیدا کنید.

۸- اتوبوسی بین دو شهر A و B به فاصله ۱۰۰ مایل تردد می کند. اگر این اتوبوس در بین راه خراب شود، فاصله از این نقطه تا شهر A دارای توزیع یکنواخت بر (۱۰۰ و ۰) است. تعمیرگاه اتوبوس در شهر A، شهر B و در مرکز راه بین A و B وجود دارد. پیشنهاد می شود که داشتن سه تعمیرگاه به ترتیب به فاصله های ۲۵، ۵۰، ۷۵ مایل از شهر A کاراتر می باشد. آیا با این امر موافقید؟ چرا؟

۹- شما در ساعت ۱۰ به یک ایستگاه اتوبوس وارد می شوید با آگاهی به این که اتوبوس در زمانی که بین ۱۰ و ۳۰ : ۱۰ بطور یکنواخت توزیع شده است می رسد. احتمال این که بیش از ۱۰ دقیقه منتظر شوید چقدر است؟ اگر در ساعت ۱۵ : ۱۰ اتوبوس هنوز نیامده باشد، احتمال این که حداقل ۱۰ دقیقهٔ دیگر منتظر شوید چقدر است؟

۱۰- اگر X دارای توزیع نرمال با پارامترهای $\mu = 10$ و $\sigma^2 = 36$ باشد. مطلوب است محاسبهٔ

(الف) $P\{X > 5\}$

(ب) $P\{4 < X < 16\}$

(پ) $P\{X < 8\}$

(ت) $P\{X < 20\}$

(ث) $P\{X > 16\}$

۱۱- مقدار باران سالیانه (به اینچ) در منطقه معینی دارای توزیع نرمال با $\mu = 40$, $\sigma = 4$ می باشد. احتمال این که، با آغاز از امسال، قبل از آن که سالی بیاید که نزولات جوی آن ۵۰ اینچ باشد بیش از ۱۰ سال طول بکشد، چقدر است؟ چه فرضهایی را در نظر گرفته اید؟

۱۲- فرض کنید که اندازه قد یک مرد ۲۵ ساله بر حسب اینچ متغیر تصادفی نرمال با پارامتر $\mu = 71$, $\sigma^2 = 6.25$ می باشد. چه درصدی از مردان ۲۵ ساله دارای قدی بیش از ۶ فوت و ۲ اینچ می باشند؟ چه درصدی از مردان در باشگاه ۶ فوتیها دارای قدی بیش از ۶ فوت و ۵ اینچ هستند؟

۱۳- عرض شکاف یک قطعه آلومینیومی (بر حسب اینچ) دارای توزیع نرمال با $\mu = 0.9000$ و $\sigma = 0.0030$ می باشند حدود فنی برابر با $.9000 \pm .0050$ داده شده است. چند درصد از قطعات معیوب خواهد بود؟

وقتی عرض شکافها دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu = .9000$ و σ می‌باشد. مقدار ماگزیمم مجاز σ که اجازه نخواهد داد بیش از یکی در بین ۱۰۰ قطعه معیوب باشد چقدر است؟

۱۴- تاسی متعادل را هزار بار مستقلاً پرتاب می کنیم. احتمالی را که عدد ۶ بین ۱۵۰ و ۲۰۰ بار ظاهر شود با تقریب محاسبه کنید. اگر این عدد دقیقاً ۲۰۰ بار ظاهر شود، احتمالی را که عدد ۵ کمتر از ۱۵۰ بار ظاهر شود پیدا کنید.

۱۵- عمر تراشه های داخلی کامپیوتر که به وسیله تولیدکننده نیمه هادیها تولیدمی شوددارای توزیع نرمال با پارامترهای $\mu = 1.4 \times 10^3$ ساعت و $\sigma = 3 \times 10^5$ ساعت است. احتمال تقریبی که توده‌ای مرکب از ۱۰۰ تراشه شامل حداقل ۲۰ تراشه با عمر کمتر از $۱/۸ \times ۱۰^۶$ ساعت است، باشد، چقدر است؟

۱۶- با استفاده از برنامهٔ کامپیوتری که در پایان فصل ۴ ارائه شده است، هرگاه X متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامتر $n = 300$ و $p = 0.1$، $p\{X \le 25\}$ را محاسبه کنید. این مقدار را با (الف) تقریب پواسن آن (ب) با تقریب نرمال آن مقایسه کنید. در استفاده از تقریب نرمال، احتمال مطلوب را به صورت $P\{X < 25.5\}$ بنویسید تا این که از تصحیح پیوستگی استفاده کرده باشید. (برای محاسبه تقریب پواسن به برنامهٔ پایان فصل ۴ نیاز دارید).

۱۷ - در کارخانه ای دو نوع سکه تولید می شود: سکه سالم و سکهٔ اریب که ۵۵ درصد موارد شیر می آید. یکی از این سکه ها را بدون این که بدانیم از کدام نوع است در اختیار داریم. به منظور پی بردن به این که چه نوع سکه ای داریم، آزمون آماری زیر را انجام می دهیم: سکه را ۱۰۰۰ بار پرتاب می کنیم. اگر این سکه ۵۲۵ بار یا بیشتر شیر بیاید، نتیجه می گیریم که این سکهٔ اریب است، در صورتی که، اگر کمتر از ۵۲۵ بار شیر بیاید، آن گاه نتیجه می گیریم که این سکه سالم است. اگر این سکه واقعاً سالم باشد، احتمالی که به نتیجهٔ نادرست برسیم چقدر است؟ این احتمال چقدر است اگر سکه اریب باشد.

۱۸- در ۱۰۰۰۰ پرتاب مستقل سکه ای، ۵۸۰۰ بار شیر آمده است. آیا منطقی است فرض کنیم که این سکه سالم نیست؟ شرح دهید.

۱۹ - تصویری به دو بخش تقسیم شده است ـ یکی بخش سفید و دیگری سیاه ـ اندازه حاصل از نقطه ای که بتصادف از بخش سفید انتخاب شده است، دارای توزیع نرمال با پارامترهای (۴و۴) است، در حالی که اندازهٔ حاصل از نقطه ای که بتصادف از بخش سیاه انتخاب شده

است دارای توزیع نرمال با پارامترهای (۹ و ۶) است . نقطه ای از تصویر بتصادف انتخاب می شود که دارای اندازهٔ ۵ است . اگر کسری از تصویر که سیاه است α باشد، به ازای چه مقدار α ، احتمال ارتکاب خطا یکسان است اگر نتیجه بگیریم که نقطه در بخش سیاه یا سفید بوده است؟

۲۰ – زمان لازم برای تعمیر یک ماشین (به ساعت) ، متغیری تصادفی با توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ است .

(الف) احتمال این که زمان تعمیری از ۲ ساعت تجاوز کند چقدر است؟

(ب) احتمال شرطی که تعمیری لااقل ۱۰ ساعت طول بکشد، در صورتی که می دانیم مدت آن از ۹ ساعت بیشتر است چقدر است؟

۲۱– سالهایی که رادیویی کار می کند دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{8}$ است . اگر جونز رادیوی مستعملی بخرد احتمال این که این رادیو پس از آن ۸ سال کار کند چقدر است؟

۲۲– جونز حساب می کند که تعداد کل هزاران مایلی که یک خودرو می تواند قبل از قراضه شدن به پیماید یک متغیر تصادفی نمائی با پارامتر $\frac{۱}{۲۰}$ است . اسمیت خود رودست دومی دارد که ادعا می کند تنها ۱۰۰۰۰ مایل پیموده است . اگر جونز این خود رو را بخرد، احتمال این که وی حداقل ۲۰۰۰۰ مایل دیگر از آن کار بکشد چقدر است؟ مسأله را تحت فرضی که عمراین اتومبیل به جای توزیع نمایی دارای توزیع یکنواخت بر (۴۰ و ۰)، (بر حسب هزار مایل)، باشد تکرار کنید .

۲۳– $\lambda(t)$ نرخ مخاطره یک مرد سیگاری t ساله چنان است که

$$\lambda(t) = .027 + .00025(t - 40)^2, \quad t \geq 40$$

اگر فرض کنیم یک مرد سیگاری ۴۰ ساله کلیه مخاطرات را پشت سر بگذارد، احتمال این که بدون ابتلا به سرطان ریه (الف) تا سن ۵۰ سالگی (ب) تا سن ۶۰ سالگی زنده بماند چقدر است؟

۲۴– فرض کنید توزیع عمر یک قلم کالا دارای تابع نرخ مخاطرهٔ زیر است :

$$\lambda(t) = t^3, t > 0.$$

(الف) احتمال این که این قلم کالا دو سال عمر کند چقدر است؟

(ب) احتمال این که زمان عمر این قلم کالا بین ۰٫۴ و ۱٫۴ باشد چقدر است؟

(پ) احتمال این که یک قلم کالای یک ساله تا دو سال دوام بیاورد چقدر است؟

۲۵- اگر X بر (۱ ، ۱-) دارای توزیع یکنواخت باشد، مطلوب است.

(الف) $P\{|X| > \frac{1}{2}\}$

(ب) $P\{\sin(\pi X/2) > \frac{1}{3}\}$

(پ) تابع چگالی متغیر تصادفی $|X|$.

۲۶- اگر Y بر (۵ و ۰) دارای توزیع یکنواخت باشد، احتمال این که هر دو ریشه معادلهٔ $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ حقیقی باشند چقدر است؟

۲۷- اگر X یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ باشد، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y را که با $Y = \log X$ تعریف شده است محاسبه کنید.

۲۸- اگر X بر (۱و۰) بطور یکنواخت توزیع شده باشد، تابع چگالی $Y = e^X$ را بیابید.

۲۹- مطلوب است توزیع $R = A\sin\theta$ ، که در آن A یک ثابت مشخص و θ بر $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ دارای توزیع یکنواخت است.

متغیر تصادفی R در نظریه بالیستیک مطرح می شود. اگر گلوله ای از مبدأ با زاویهٔ α نسبت به زمین و با سرعت V شلیک شود، آن گاه نقطه R که گلوله به زمین اصابت می کند به صورت $R = (v^2/g)(\sin 2\alpha)$ بیان می شود که در آن g ثابت گرانشی و برابر ۹۸۰ سانتی متر بر مربع ثانیه است.

فصل ششم

توزیع توأم متغیرهای تصادفی

۱ - تابع توزیع توأم

در بارهٔ توزیعهای احتمال متغیرهای تصادفی یک متغیری بحث شد. ولی اغلب با احتمال مربوط به دومتغیر یا بیشتر سروکار داریم. برای بحث در بارهٔ این نوع احتمالها برای هردومتغیر تصادفی X و Y تابع توزیع احتمال تجمعی توأم X و Y به صورت زیر تعریف می شود.

$$F(a, b) = P\{X \leq a,\ Y \leq b\} \qquad -\infty < a, b < \infty$$

حال توزیع X را می توان از توزیع توأم X و Y به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P\{X \leq a\} \\ &= P\{X \leq a,\ Y < \infty\} \\ &= P\left(\lim_{b \to \infty} \{X \leq a,\ Y \leq b\}\right) \\ &= \lim_{b \to \infty} P\{X \leq a,\ Y \leq b\} \\ &= \lim_{b \to \infty} F(a, b) \\ &\equiv F(a, \infty) \end{aligned}$$

خواننده توجه دارد که در معادلات قبل از پیوستگی تابع مجموعه ای احتمال (یعنی پیشامدها) استفاده کرده ایم. همین طور تابع توزیع تجمعی Y عبارت است از :

$$F_Y(b) = P\{Y \le b\} = \lim_{a\to\infty} F(a,b) = F(\infty, b)$$

توابع توزیع F_x و F_y را اغلب توزیعهای کناری (حاشیه ای) X و Y نامند.

تمام گزاره های مربوط به احتمال توأم X و Y را بطور نظری می توان بر حسب تابع توزیع توأم آنها به دست آورد. مثلاً، فرض کنید بخواهیم احتمال توأم X بزرگتر از a و Y بزرگتر از b را محاسبه کنیم، این کار به صورت زیر انجام می شود:

$$\begin{aligned} P\{X > a, Y > b\} &= 1 - P(\{X > a, Y > b\}^c) \\ &= 1 - P(\{X > a\}^c \cup \{Y > b\}^c) \\ &= 1 - P(\{X \le a\} \cup \{Y \le b\}) \\ &= 1 - [P\{X \le a\} + P\{Y \le b\} - P\{X \le a, Y \le b\}] \\ &= 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F(a,b) \end{aligned} \tag{۱-۱}$$

معادلهٔ (۱-۱) حالت خاصی از معادلهٔ (۱-۲) است که بررسی درستی آن به عنوان تمرین واگذار می شود:

$$\begin{aligned} &P\{a_1 < X \le a_2, b_1 < Y \le b_2\} \\ &\quad = F(a_2, b_2) + F(a_1, b_1) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) \end{aligned} \tag{۲-۱}$$

که در آن $b_1 < b_2, a_1 < a_2$.

در حالتی که X و Y هر دو متغیرهای تصادفی گسسته اند، بهتر است **تابع جرم احتمال توأم** X و Y را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$p(x, y) = P\{X = x, Y = y\}$$

تابع جرم احتمال X را می توان از روی $p(x, y)$ به صورت زیر محاسبه کرد.

$$p_X(x) = P\{X = x\} = \sum_{y:p(x,y)>0} p(x,y)$$

همین طور

$$p_Y(y) = \sum_{x:p(x,y)>0} p(x,y)$$

مثال ۱ الف. فرض کنید سه مهره بتصادف از جعبه ای دارای ۳ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ آبی خارج می شود. اگر X و Y به ترتیب تعداد مهره های قرمز و سفید انتخاب شده باشد، درآن صورت تابع جرم احتمال توأم X و Y یعنی $p(i, j) = P(X = i, Y = j)$ عبارت است از :

$$p(0,0) = \binom{5}{3} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{10}{220}$$

$$p(0,1) = \binom{4}{1}\binom{5}{2} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{40}{220}$$

$$p(0,2) = \binom{4}{2}\binom{5}{1} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{30}{220}$$

$$p(0,3) = \binom{4}{3} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{4}{220}$$

$$p(1,0) = \binom{3}{1}\binom{5}{2} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{30}{220}$$

$$p(1,1) = \binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{60}{220}$$

$$p(1,2) = \binom{3}{1}\binom{4}{2} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{18}{220}$$

$$p(2,0) = \binom{3}{2}\binom{5}{1} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{15}{220}$$

$$p(2,1) = \binom{3}{2}\binom{4}{1} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{12}{220}$$

$$p(3,0) = \binom{3}{3} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{1}{220}$$

این احتمالها را می توان بآسانی به صورت جدول ۶-۱ نوشت :

خوانده باید توجه داشته باشد که تابع جرم احتمال X از جمع سطرها و تابع جرم احتمال Y از جمع ستونها به دست می آید. چون این توابع در کنارجدول ظاهر می شوند آنها را تابع جرم احتمال کناری X و Y گویند.

مثال ۱ ب. فرض کنید ۱۵ درصد خانواده های یک مجتمع فاقد بچه، ۲۰ درصد دارای ۱، ۳۵ درصد دارای ۲ بچه و ۳۰ درصد دارای ۳ بچه هستند. علاوه براین فرض کنید که درهر خانواده، هر بچه با احتمال یکسان بطور مستقل پسر یا

دختر است. اگر یک خانواده بتصادف از این مجتمع انتخاب شود آن گاه B تعداد پسران و G تعداد دختران این خانواده دارای تابع جرم احتمال توأم به صورت جدول ۶-۲ می باشد.

جدول ۶-۱ $P\{X = i, Y = j\}$

i \ j	0	1	2	3	مجموع سطری $= P\{X = i\}$
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$	$\frac{84}{220}$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	$\frac{108}{220}$
2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0	$\frac{27}{220}$
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0	$\frac{1}{220}$
مجموع ستونی $= P\{Y = j\}$	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$	

جدول ۶-۲ $P\{B = i, G = j\}$

i \ j	0	1	2	3	مجموع سطری $= P\{B = i\}$
0	.15	.10	.0875	.0375	.3750
1	.10	.175	.1125	0	.3875
2	.0875	.1125	0	0	.2000
3	.0375	0	0	0	.0375
مجموع ستونی $= P\{G = j\}$	.375	.3875	.2000	.0375	

حل: این احتمالها به صورت زیر محاسبه می شوند:

$P\{B = 0, G = 0\} = P$ {هیچ کودک} $= .15$

$P\{B = 0, G = 1\} = P$ {۱ دختر و جمعاً یک کودک}
$= P$ {۱ کودک} P {۱ دختر | ۱ کودک} $= (.20)$

$P\{B = 0, G = 2\} = P$ {۲ دختر و جمعاً ۲ کودک}
$= P$ {۲ کودک} P {دو دختر | دو کودک} $= (.35)(\frac{1}{2})^2$

تحقیق درستی بقیهٔ احتمالها به خواننده واگذار می شود.

متغیرهای X و Y را **تواماً پیوسته گوییم** اگر تابعی مانند F(x,y) وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر x و y و هر مجموعه C از زوجهای حقیقی (یعنی C یک مجموعه در صفحه مختصات است) داشته باشیم

$$P\{(X, Y) \in C\} = \iint_{(x,y)\in C} f(x, y)\, dx\, dy \qquad (۱-۳)$$

تابع f(x,y) را **تابع چگالی احتمال توأم** X و Y نامند. اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواهی از اعداد حقیقی باشند در آن صورت با تعریف $C = \{(x , y) : x \in A , y \in B\}$
از معادلهٔ (۱-۳) نتیجه می شود:

$$P\{X \in A, Y \in B\} = \int_B \int_A f(x, y)\, dx\, dy \qquad (۱-۴)$$

چون

$$F(a, b) = P\{X \in (-\infty, a], Y \in (-\infty, b]\}$$
$$= \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{a} f(x, y)\, dx\, dy$$

با مشتق گیری داریم

$$f(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial a\, \partial b} F(a, b)$$

به شرط آن که مشتقات نسبی تعریف شده باشد و یک تعبیر دیگر تابع چگالی توأم از معادله (۱-۴) به دست می آید:

$$P\{a < X < a + da, b < Y < b + db\} = \int_b^{d+db} \int_a^{a+da} f(x, y)\, dx\, dy$$
$$\approx f(a, b)\, da\, db$$

به شرط آن که da و db کوچک و f(x , y) در a و b پیوسته باشد. بنابراین F(a , b) اندازه‌ای از احتمال نزدیکی بردار تصادفی (X , Y) را به (a , b) نشان می دهد.

اگر X و Y توأماً پیوسته باشند، هریک از آنها به تنهایی نیز پیوسته است و توابع چگالی احتمال آنها به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} P\{X \in A\} &= P\{X \in A,\ Y \in (-\infty, \infty)\} \\ &= \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx \\ &= \int_A f_X(x)\, dx \end{aligned}$$

که در آن

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

تابع چگالی احتمال X است. همین طور تابع چگالی احتمال Y برابر است با:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

مثال ۱ پ. تابع چگالی احتمال X و Y به صورت زیر است.

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه: (۱)

حل:

۱-

$$\begin{aligned} P\{X > 1,\ Y < 1\} &= \int_0^1 \int_1^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 2e^{-2y}\left(-e^{-x}\Big|_1^{\infty}\right) dy \\ &= e^{-1}\int_0^1 2e^{-2y}\, dy \\ &= e^{-1}(1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

۲-

$$\begin{aligned} P\{X < Y\} & \iint_{(x,y):x<y} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^y 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy \\ &= \int_0^\infty 2e^{-2y}(1-e^{-y})\,dy \\ &= \int_0^\infty 2e^{-2y}\,dy - \int_0^\infty 2e^{-3y}\,dy \\ &= 1-\tfrac{2}{3} \\ &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

۳-

$$\begin{aligned} P\{X < a\} &= \int_0^a \int_0^\infty 2e^{-2y}e^{-x}\,dy\,dx \\ &= \int_0^a e^{-x}\,dx \\ &= 1-e^{-a} \end{aligned}$$

مثال ۱ ت. دایره‌ای به شعاع R در نظر بگیرید و فرض کنید نقطه‌ای بتصادف در داخل دایره انتخاب می‌شود به قسمی که تمام نواحی با مساحت مساوی در داخل دایره با احتمال مساوی شامل این نقطه‌اند. (به عبارت دیگر، این نقطه در داخل دایره بطور یکنواخت توزیع شده است.) اگر مرکز دایره را مبدأ مختصات اختیار کنیم و X و Y را مختصات نقطهٔ انتخاب شده در نظر بگیریم (شکل ۶-۱) نتیجه می‌شود که برای مقدار ثابت تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر است:

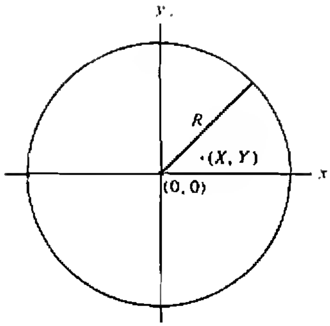
$$f(x,y) = \begin{cases} c & x^2+y^2 \le R^2 \\ 0 & x^2+y^2 > R^2 \end{cases}$$

زیرا (X , Y) با احتمال مساوی نزدیک هر نقطه در دایره است.

۱- مقدار c را معین کنید.

۲- توابع چگالی حاشیه‌ای X و Y را پیدا کنید.

۳- احتمال این که فاصلهٔ نقطهٔ انتخاب شده از مبدأ بیشتر از a نباشد چقدر است؟



شکل ۶-۱ توزیع احتمال توأم

حل :

۱ - چون

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = 1$$

نتیجه می شود .

$$c \iint_{x^2+y^2 \le R^2} dy\, dx = 1$$

مقدار $\iint_{x^2+y^2\le R^2} dydx$ را می توان با استفاده از مختصات قطبی محاسبه کرد یا بطور ساده تری باتوجه به این که این انتگرال مساحت دایره رانشان می دهدبرابربا πR^2 گرفت . بنابراین

$$c = \frac{1}{\pi R^2}$$

۲-

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \\ &= \frac{1}{\pi R^2}\int_{x^2+y^2\le R^2} dy \\ &= \frac{1}{\pi R^2}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy \qquad x^2 \le R^2 \\ &= \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2} \qquad x^2 \le R^2 \end{aligned}$$

مقدار تابع برابر صفر است اگر $x^2 > R^2$. با توجه به تقارن، چگالی کناری Y به صورت زیر به دست می‌آید :

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2} \qquad y^2 \le R^2$$
$$= 0 \qquad y^2 > R^2$$

۳- تابع توزیع $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ، فاصله نقطه تا مبدأ به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$\begin{aligned} F_Z(a) &= P\{\sqrt{X^2 + Y^2} \le a\} \\ &= P\{X^2 + Y^2 \le a^2\} \\ &= \iint_{x^2+y^2\le a^2} f(x, y)\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \iint_{x^2+y^2\le a^2} dy\, dx \\ &= \frac{\pi a^2}{\pi R^2} \\ &= \frac{a^2}{R^2} \end{aligned}$$

که در آن مقدار انتگرال $\iint_{x^2+y^2\le a^2} dydx$ برابر با مساحت دایره‌ای به شعاع a یعنی πa^2 است .

مثال ۱ ث. چگالی توأم X و Y به صورت زیر است :

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مطلوب است تابع چگالی متغیر تصادفی $\frac{X}{Y}$.

حل : ابتدا تابع توزیع $\frac{X}{Y}$ را محاسبه می‌کنیم و برای $(a > 0)$ داریم :

$$
\begin{aligned}
F_{X/Y}(a) &= P\left\{\frac{X}{Y} \le a\right\} \\
&= \iint\limits_{x/y \le a} e^{-(x+y)}\,dx\,dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^{ay} e^{-(x+y)}\,dx\,dy \\
&= \int_0^\infty (1 - e^{-ay})e^{-y}\,dy \\
&= \left[-e^{-y} + \frac{e^{-(a+1)y}}{a+1}\right]\Bigg|_0^\infty \\
&= 1 - \frac{1}{a+1}
\end{aligned}
$$

با مشتق گیری تابع چگالی $\frac{X}{Y}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f_{X/Y}(a) = 1/(a+1)^2,\ 0 < a < \infty.$$

توزیعهای احتمال توأم n متغیر تصادفی را نیز می توان دقیقاً مانند $n = 2$ تعریف کرد. مثلاً تابع توزیع احتمال تجمعی $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ از متغیرهای X_1، X_2، . . . ، X_n به صورت زیر تعریف می شود:

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = P\{X_1 \le a_1, X_2 \le a_2, \ldots, X_n \le a_n\}$$

به علاوه، n متغیر را توأماً پیوسته گوییم اگر تابعی مانند $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ که تابع چگالی احتمال توأم نامیده می شود وجود داشته باشد به قسمی که برای هر مجموعه C در فضای n بعدی داشته باشیم:

$$P\{(X_1, X_2, \ldots, X) \in C\} = \iint\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\in C}\cdots\int f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

بخصوص برای هر n مجموعه از اعداد حقیقی مانند A_1، A_2، . . .، A_n داریم:

$$
\begin{aligned}
&P\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n\} \\
&\quad = \int_{A_n}\int_{A_{n-1}}\cdots\int_{A_1} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n
\end{aligned}
$$

مثال ۱ ج. توزیع چند جمله ای . یکی از مهمترین توزیعهای توأم ، توزیع چندجمله ای است، که از یک دنباله n آزمایش یکسان و مستقل ناشی می شود، فرض کنید هر آزمایش به یکی از r برآمد ممکن به ترتیب با احتمالهای $p_1, p_2, \ldots, p_r$ ، $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ ، منجر شود. اگر X_i تعداد آزمایشها با برآمد i باشد، آن گاه

$$P\{X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_r = n_r\} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r} \qquad (۵-۱)$$

که در آن $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$.

معادلهٔ (۱-۵) با توجه به این که هر دنباله از برآمدها در n آزمایش با فرض این که برآمد i ام n_i بار، $i = 1, 2, \ldots, r$، رخ داده و با فرض استقلال آزمایشها با احتمال $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}$ رخ می دهد و چون تعداد این دنباله ها برابر $\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$ است به دست آمده است. زیرا $\frac{n!}{n_1! \ldots n_r!}$ جایگشت متمایز از n شئی وجود دارد به قسمی که n_1 شئی مشابه هم ، n_2 شئی مشابه هم، . . . ، n_r شئی مشابه هم باشند ، هر توزیع توأم با تابع جرم احتمال (۱-۵) را **توزیع چندجمله ای** نامند . خواننده توجه دارد که به ازای $r = 2$ ، توزیع چند جمله ای به توزیع دو جمله ای تبدیل می شود.

به عنوان یک کاربرد توزیع چند جمله ای، فرض کنید تاس سالمی را ۹ بار می ریزیم . احتمال این که ۱ سه بار، ۲ و ۳ دو بار، ۴ و ۵ یک بار ظاهر شود و ۶ ظاهر نشود عبارت است از :

$$\frac{9!}{3!2!2!1!1!0!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^0 = \frac{9!}{3!2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^9$$

۲ - متغیرهای تصادفی مستقل

متغیرهای تصادفی X و Y را مستقل گوییم اگر برای هر دو مجموعه از اعداد حقیقی A و B داشته باشیم :

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\} \qquad (۲-۱)$$

به عبارت دیگر X و Y مستقل هستند اگر برای هر A و B دو پیشامد $E_A = \{X \in A\}$ و

$F_B = \{Y \varepsilon B\}$ مستقل باشند.

با استفاده از سه اصل احتمال می توان نشان داد که معادلهٔ (۲-۱) فقط و فقط وقتی برقرار است که برای هر a و b

$$P\{X \le a, Y \le b\} = P\{X \le a\}P\{Y \le b\}$$

بنابراین بر حسب F تابع توزیع توأم X، Y، متغیرهای X و Y مستقل هستند اگر به ازای هر a و b

$$F(a, b) = F_X(a)F_Y(b) \quad \text{برای تمام } a, b$$

وقتی X و Y متغیرهای تصادفی گسسته هستند، شرط استقلال (۲-۱) معادل است با این که به ازای هر x و y، (۲-۲)

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \text{برای تمام } x, y \tag{۲-۲}$$

معادل بودن این دو رابطه به این طریق به دست می آید که اگر (۲-۱) برقرار باشد معادلهٔ (۲-۲) با فرض قرار دادن A و B به صورت مجموعه های یک عضوی $A = \{x\}$ و $B = \{y\}$ به دست می آید.

از طرف دیگر اگر معادله (۲-۲) برقرار باشد، در آن صورت برای هر دو مجموعهٔ A و B :

$$\begin{aligned} P\{X \in A, Y \in B\} &= \sum_{y \in B} \sum_{x \in A} p(x, y) \\ &= \sum_{y \in B} \sum_{x \in A} p_X(x)p_Y(y) \\ &= \sum_{y \in B} p_Y(y) \sum_{x \in A} p_X(x) \\ &= P\{Y \in B\}P\{X \in A\} \end{aligned}$$

یعنی معادلهٔ (۲-۱) برقرار است.

در حالت پیوستگی توأم شرط استقلال معادل است با این که به ازای هر x و y

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{برای تمام } x, y$$

پس بطور ساده می توان گفت X و Y مستقل هستند اگر دانستن مقدار یکی از آنها مقدار دیگری را تغییر ندهد. متغیرهای تصادفی که مستقل نباشند وابسته نامیده می شوند.

مثال ۲ الف. فرض کنید $n + m$ آزمایش مستقل با احتمال موفقیت یکسان p انجام می شود. اگر X تعداد موفقیتها در n آزمایش اول و Y تعداد موفقیتها در m آزمایش بعدی باشد در آن صورت X و Y مستقلند، زیرا دانستن تعداد موفقیتها در n آزمایش اول اثری بر توزیع تعداد موفقیتها در m آزمایش بعدی ندارد (بنا بر فرض مستقل بودن آزمایشها). در واقع برای اعداد صحیح x و y داریم:

$$P\{X = x, Y = y\} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \binom{m}{y} p^y (1-p)^{m-y}, \qquad 0 \le x \le n,\quad 0 \le y \le m$$

$$= P\{X = x\} P\{Y = y\}$$

ازطرف دیگر، X و Z وابسته خواهند بود اگر Z تعدادکل موفقیتها در $n + m$ آزمایش باشد(چرا؟)

مثال ۲ ب. فرض کنید تعداد افرادی که در یک روز معین به ادارهٔ پست وارد می شوند یک متغیر تصادفی دارای توزیع پواسن با پارامتر λ است. ثابت کنید اگر هر فرد که به ادارهٔ پست وارد می شود با احتمال p مرد و با احتمال $1-p$ زن باشد، آن گاه تعداد مردان و زنانی که وارد ادارهٔ پست می شوند متغیرهای تصادفی مستقل پواسن به ترتیب با پارامترهای λp و $\lambda(1-p)$ است.

حل: فرض کنید X و Y به ترتیب تعداد مردان و زنانی باشند که وارد ادارهٔ پست می شوند. حال استقلال X و Y را با برقراری معادلهٔ (۲-۲) ثابت می کنیم. برای یافتن عبارتی برای $P(X = i$ و $Y = j)$ پیشامد را بر $X + Y$ شرطی می کنیم:

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i, Y = j \mid X + Y = i + j\} P\{X + Y = i + j\} + P\{X = i, Y = j \mid X + Y \ne i + j\} P\{X + Y \ne i + j\}$$

خواننده باید توجه داشته باشد که این معادله فقط حالت خاصی از فرمول زیر است:

$$P(E) = P(E \mid F) P(F) + P(E \mid F^c) P(F^c)$$

بدیهی است که:

$$P\{X = i, Y = j \mid X + Y \ne i + j\} = 0$$

در نتیجه داریم :

$$P\{X=i, Y=j\}=P\{X=i, Y=j|X+Y=i+j\}P\{X+Y=i+j\} \qquad (۲-۳)$$

حال چون $X+Y$ تعداد کل افرادی است که به ادارهٔ پست وارد می شوند، بنا به فرض داریم :

$$P\{X+Y=i+j\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \qquad (۲-۴)$$

از طرف دیگر، با فرض این که $i+j$ نفر وارد ادارهٔ پست شده اند، چون هر فرد می تواند با احتمال p مرد باشد، پس احتمال این که دقیقاً i نفر از آنها مرد (و در نتیجه j نفر از آنها زن) باشد دارای توزیع دو جمله ای $\binom{i+j}{i}p^i(1-p)^j$ خواهد بود.
یعنی

$$P\{X=i, Y=j|X+Y=i+j\}=\binom{i+j}{i}p^i(1-p)^j \qquad (۲-۵)$$

با جانشین کردن معادلات (۲-۴) و (۲-۵) در معادلهٔ (۲-۳) داریم :

$$\begin{aligned}P\{X=i, Y=j\}&=\binom{i+j}{i}p^i(1-p)^je^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}\\&=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^i}{i!j!}[\lambda(1-p)]^j \qquad (۲-۶)\\&=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!}\end{aligned}$$

بنابر این

$$P\{X=i\}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}\sum_j e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!} \qquad (۲-۷)$$

و بطور مشابه

$$P\{Y=j\}=e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} \qquad (۲-۸)$$

از معادلات (۲-۶)، (۲-۷) و (۲-۸) حکم نتیجه می شود.

مثال ۲ پ.زن و مردی تصمیم می گیرند در یک فروشگاه یکدیگر را ملاقات کنند، اگر

هرکدام مستقل از یکدیگر در زمانی با توزیع یکنواخت در فاصلهٔ ساعت ۱۲ تا ساعت ۱ به محل برسند، مطلوب است احتمال این که نفری که اول وارد می شود بیشتر از ۱۰ دقیقه انتظار بکشد.

حل: اگر X و Y به ترتیب زمان رسیدن مرد و زن بعد از ساعت ۱۲ باشد، در این صورت X و Y متغیرهای تصادفی مستقلند که هرکدام دارای توزیع یکنواخت در فاصله (۶۰ و ۰) می باشند. پس احتمال مطلوب عبارت است از: $P\{X + 10 < Y\} + P\{Y + 10 < X\}$ که با توجه به تقارن برابر است با $2P\{X + 10 < Y\}$ و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$
\begin{aligned}
2P\{X + 10 < Y\} &= 2 \cdot \iint_{x+10<y} f(x, y)\, dx\, dy \\
&= 2 \iint_{x+10<y} f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy \\
&= 2 \int_{10}^{60} \int_{0}^{y-10} \left(\frac{1}{60}\right)^2 dx\, dy \\
&= \frac{2}{(60)^2} \int_{10}^{60} (y - 10)\, dy \\
&= \frac{25}{36}
\end{aligned}
$$

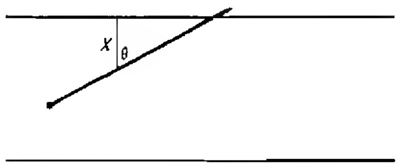
مثال بعدی قدیمی ترین مسأله ای است که در بارهٔ احتمالهای هندسی بحث می کند. این مسأله ابتدا توسط بوفن طبیعی دان فرانسوی در قرن هیجدهم طرح و حل شد، و معمولاً به آن مسأله سوزن بوفن اطلاق می شود.

مثال ۲ ت. (مسأله سوزن بوفن) میزی با خطهای موازی هم فاصله به فاصلهٔ D خط کشی شده است. سوزنی به طول L، $L \le D$، بطور تصادفی روی میز انداخته می شود؛ احتمال این که سوزن یکی از خطها را قطع کند چقدر است (حالت ممکن دیگر این است که سوزن بین دو خط موازی قرار گیرد)؟

حل: وضع سوزن را با مشخص کردن X فاصلهٔ وسط سوزن تا نزدیکترین خط موازی و زاویهٔ θ بین سوزن و این خط عمود معین می کنیم. (شکل ۶-۲) سوزن یک خط را قطع می کند

اگر وتر مثلث قائم‌الزاویه شکل ۶-۲ کمتر از $\frac{L}{2}$ باشد، یعنی اگر:

$$\frac{X}{\cos\theta} < \frac{L}{2} \qquad \text{یا} \qquad X < \frac{L}{2}\cos\theta$$



شکل ۶-۲

چون X بین 0 و $\frac{D}{2}$ و θ بین 0 و $\frac{\pi}{2}$ تغییر می کند، منطقی است که فرض کنیم آنها متغیرهای تصادفی (یکنواخت) مستقلند که بر فاصله های مربوطه بطور یکنواخت توزیع شده اند. بنابراین

$$\begin{aligned}
P\left\{X < \frac{L}{2}\cos\theta\right\} &= \iint\limits_{x < L/2\cos y} f_X(x) f_\theta(y)\, dx\, dy \\
&= \frac{4}{\pi D}\int_0^{\pi/2}\int_0^{L/2\cos y} dx\, dy \\
&= \frac{4}{\pi D}\int_0^{\pi/2}\frac{L}{2}\cos y\, dy \\
&= \frac{2L}{\pi D}
\end{aligned}$$

مثال ۲ ث. تشخیص توزیع نرمال. فرض کنید X و Y فاصله های افقی و قائم نقطهٔ برخورد یک گلوله تا هدف باشد، و فرض می‌کنیم:

۱- X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توابع چگالی مشتق پذیر باشند.

۲ - چگالی توأم X و Y ، فقط از طریق $x^2 + y^2$ به x و y بستگی دارد.

به عبارت ساده فرض (۲) بیان می کند که احتمال این که گلوله به هر نقطه صفحهٔ x y برخورد کند فقط تابع فاصلهٔ آن تا هدف است و به زاویهٔ جهت برخورد بستگی ندارد.

یک عبارت معادل (۲) این است که بگوییم تابع چگالی توأم در اثر چرخش پایدار است .

این حقیقت جالب از فرضهای (۱) و (۲) نتیجه می شود که X و Y متغیرهای تصادفی نرمال هستند . برای اثبات این مطلب با توجه به فرضها می توان نوشت :

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = g(x^2 + y^2) \tag{۲-۹}$$

که در آن g تابعی مناسب است . اگر از معادله (۲-۹) نسبت به x مشتق بگیریم داریم :

$$f'_X(x)f_Y(y) = 2xg'(x^2 + y^2) \tag{۲-۱۰}$$

از تقسیم معادلهٔ (۲-۱۰) بر معادلهٔ (۲-۱۰) داریم:

$$\frac{f'_X(x)}{f_X(x)} = \frac{2xg'(x^2 + y^2)}{g(x^2 + y^2)}$$

یا

$$\frac{f'_X(x)}{2xf_X(x)} = \frac{g'(x^2 + y^2)}{g(x^2 + y^2)} \tag{۲-۱۱}$$

چون سمت چپ معادلهٔ (۲-۱۱)فقط به x بستگی داردوسمت راست معادله به $x^2 + y^2$ ، نتیجه می شود که سمت چپ باید به ازای تمام مقادیر x ثابت باشد. برای روشن شدن موضوع دو مقدار دلخواه x_1 و x_2 را در نظر می گیریم و فرض می کنیم y_1 و y_2 به قسمی باشند که $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ ؛ در این صورت از معادلهٔ (۲-۱۱) نتیجه می شود:

$$\frac{f'_X(x_1)}{2x_1f_X(x_1)} = \frac{g'(x_1^2 + y_1^2)}{g(x_1^2 + y_1^2)} = \frac{g'(x_2^2 + y_2^2)}{g(x_2^2 + y_2^2)} = \frac{f'_X(x_2)}{2x_2f_X(x_2)}$$

بنابراین

$$\frac{f'_X(x)}{xf_X(x)} = c \qquad \text{یا} \qquad \frac{d}{dx}(\log f_X(x)) = cx$$

که پس از انتگرال گیری از دو طرف به صورت زیر در می آید:

$$\log f_X(x) = a + \frac{cx^2}{2} \qquad \text{یا} \qquad f_X(x) = ke^{cx^2/2}$$

با توجه به $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ مقدار c باید منفی باشد و می توان آن را به صورت

$c = -\frac{1}{\sigma^2}$ نوشت . بنابراین

$$f_X(x) = ke^{-x^2/2\sigma^2}$$

یعنی X متغیر تصادفی نرمال باپارامترهای$\mu = 0$ و σ^2 است . به طریقی مشابه می توان نشان داد :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}} e^{-y^2/2\bar{\sigma}^2}$$

علاوه بر این از فرض (۲) نتیجه می شود $\sigma^2 = \bar{\sigma}^2$، پس X و Y متغیرهای تصادفی نرمال هم توزیع مستقل با پارامترهای $\mu = 0$ و σ^2 هستند .

البته مفهوم استقلال را می توان برای بیش از دو متغیر نیز تعریف کرد . بطور کلی n متغیر تصادفی X_1 ، . . . ، X_n را مستقل گوییم اگر برای تمام مجموعه های A_1 ، . . . ، A_n از اعدادحقیقی

$$P\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \in A_i\}$$

مانند قبل ، می توان نشان دادکه این شرط معادل است با این که به ازای تمام اعداد حقیقی a_1 ، . . . ، a_n

$$P\{X_1 \le a_1, X_2 \le a_2, \ldots, X_n \le a_n\}$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \le a_i\} \quad \text{برای تمام } a_1, a_2, \ldots, a_n$$

بالاخره ، یک مجموعهٔ نامتناهی از متغیرهای تصادفی را مستقل گوییم اگر هر زیر مجموعهٔ متناهی از آنها مستقل باشند .

مثال ۲ ج : یک کامپیوتر چگونه یک زیر مجموعهٔ تصادفی را انتخاب می کند؟ بیشتر کامپیوترهامی توانند متغیرهای تصادفی با توزیع یکنواخت در فاصله (۱ ، ۰) تولید یا شبیه سازی کنند این کار به کمک یک زیرروال انجام می گیرد . درنتیجه برای کامپیوترخیلی آسان است که یک متغیرتصادفی نشاگر (یعنی برنولی) بسازد . فرض کنید I یک متغیر نشانگر باشد به قسمی که :

$$P\{I = 1\} = p = 1 - P\{I = 0\}$$

کامپیوتر I را با انتخاب یک عدد تصادفی یکنواخت در (0,1) مانند U شبیه سازی می کند و سپس I را به صورت زیر قرار می دهد :

$$I = \begin{cases} 1 & U < p \\ 0 & U > p \end{cases}$$

فرض کنید می خواهیم به کمک کامپیوتر k عدد، $k \le n$ ، از میان اعداد ۱ ، ۲ ، . . . ، n انتخاب کنیم به قسمی که هریک از $\binom{n}{k}$ زیر مجموعه به حجم k برای انتخاب شدن هم احتمال باشد. حال روشی را ارائه می دهیم که کامپیوتر به کمک آن بتواند این مسأله را حل کند. برای تولید این زیرمجموعه به ترتیب n متغیر نشانگر I_1 ، . . . ، I_n ، که از آنها k تا برابر ۱ است را شبیه سازی می کنیم.

برای تولید n متغیر تصادفی I_1 ، ... ، I_n ، n متغیر تصادفی یکنواخت مستقل U_1 ، . . . ، U_n را در فاصله (۰ ، ۱) شبیه سازی می کنیم. سپس تعریف می کنیم

$$I_1 = \begin{cases} 1 & U_1 < \dfrac{k}{n} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال به روش برگشتی پس از تعیین $I_1 , \ldots , I_i$ ، می نویسیم

$$I_{i+1} = \begin{cases} 1 & U_{i+1} < \dfrac{k - (I_1 + \cdots + I_i)}{n - i} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به عبارت دیگر در مرحلهٔ $i+1$ مقدار I_{i+1} را با احتمالی برابر تعداد نقاط باقیمانده زیر مجموعه (یعنی $k - \sum_{j=1}^{i} I_j$) تقسیم بر تعداد باقیماندهٔ ممکن (یعنی $n - i$) را برابر ۱ قرار می دهیم. (سپس $i+1$ را در زیر مجموعه مطلوب قرار می‌دهیم). در نتیجه توزیع توأم $I_1 , \ldots , I_n$ به صورت زیر تعیین می شود:

$$P\{I_1 = 1\} = \frac{k}{n}$$

$$P\{I_{i+1} = 1 \mid I_1, \ldots, I_i\} = \frac{k - \sum_{j=1}^{i} I_j}{n - i} \qquad 1 < i < n$$

اثبات این مطلب که نتایج فوق در تمام زیر مجموعه های به حجم k هم احتمال هستند، به کمک استقراء روی $k + n$ خواهد بود. اثبات برای $k + n = 2$ (یعنی وقتی $k = 1$ و $n = 1$) بدیهی است. پس فرض می کنیم حکم برای $k + n \le l$ صحیح باشد. حال فرض

می کنیم. $k + n = l + 1$ و یک زیر مجموعهٔ دلخواه به حجم k مثلاً $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k$ را درنظر می گیریم و دو حالت زیر را بررسی می کنیم.

حالت ۱ $i_1 = 1$

$$P\{I_1 = I_{i_2} = \cdots = I_{i_k} = 1, I_j = 0 \text{ در غیر این صورت}\}$$
$$= P\{I_1 = 1\}P\{I_{i_2} = \cdots = I_{i_k} = 1, I_j = 0 \text{ در غیر این صورت} \mid I_1 = 1\}$$

حال با فرض $I_1 = 1$ عناصر باقیماندهٔ زیر مجموعه را به عنوان زیر مجموعه ای به حجم $k - 1$ که از $n - 1$ عضو، ۲، ۳، . . . ، n انتخاب شده در نظر می گیریم. بنابر این، با توجه به فرض استقرا، احتمال شرطی این نتیجه در یک زیر مجموعه به حجم $k - 1$ برابر با $\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}}$ است؛ در نتیجه :

$$P\{I_1 = I_{i_2} = \cdots = I_{i_k} = 1, I_j = 0 \text{ در غیر این صورت}\}$$
$$= \frac{k}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} = \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

حالت ۲ $i_1 \neq 1$

$$P\{I_{i_1} = I_{i_2} = \cdots = I_{i_k} = 1, I_j = 0 \text{ در غیر این صورت}\}$$
$$= P\{I_{i_1} = \cdots = I_{i_k} = 1, I_j = 0 \text{ در غیر این صورت} \mid I_1 = 0\}P\{I_1 = 0\}$$
$$= \frac{1}{\binom{n-1}{k}}\left(1 - \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

در این جا فرض استقراء برای محاسبه احتمال شرطی به کار برده شده است.

بنابراین در تمام حالات احتمال این که یک زیر مجموعه مفروض به حجم k انتخاب شود برابر است با $\frac{1}{\binom{n}{k}}$.

تبصره . در روش قبل برای تولید یک زیر مجموعه تصادفی به حافظهٔ کمی احتیاج است. یک الگوریتم سریعتر که به حافظهٔ بیشتر نیاز دارد در بخش ۱ از فصل ۱۰ ارائه خواهد شد (این الگوریتم آخرین k عضو یک جایگشت تصادفی : ۱، ۲، . . . ، n را به کار می برد).

مثال ۲ ج. فرض کنید X ، Y و Z متغیرهای مستقل با توزیع یکنواخت روی (۰، ۱)

باشد. مطلوب است محاسبهٔ $P(X \ge YZ)$.

حل : چون

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = f_X(x) f_Y(y) f_Z(z) = 1 \qquad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$$

داریم

$$\begin{aligned} P\{X \ge YZ\} &= \iiint_{x \ge yz} f_{X,Y,Z}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_{yz}^1 dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (1 - yz)\, dy\, dz \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{z}{2}\right) dz \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

مثال ۲ ع . تعبیر احتمالی نیمه عمر. فرض کنید $N(t)$ تعداد ذرات موجود در یک جسم رادیو اکتیو در زمان t باشد. مفهوم نیمه عمر معمولاً به صورت شهودی تعریف می شود و آن مقداری است مانند h به قسمی که

$$N(t) = 2^{-t/h} N(0), \quad t > 0.$$

(توجه کنید که $N(h) = \frac{N(0)}{2}$). چون از رابطهٔ فوق نتیجه می شود که برای هردو مقدار نامنفی s و t

$$N(t + s) = 2^{-(s+t)/h} N(0) = 2^{-t/h} N(s)$$

پس زمان گذشتهٔ s هرچه باشددرزمان اضافی t تعداد ذرات موجود باضریب $2^{-t/h}$ کاهش می یابند.

چون رابطه شهودی فوق از مشاهدهٔ اجسام رادیو اکتیو شامل بی نهایت ذره نتیجه می شود به نظر می رسد که با یک تعبیر احتمالی سازگار باشد. کلید به دست آوردن یک الگوی احتمالی مناسب برای نیمه عمر با توجه به مشاهدات تجربی، که نسبت ذرات متلاشی شده

در هر فاصله زمانی به تعداد کل ذرات در شروع فاصله بستگی دارد نه به عمل این فاصله (زیرا $N(t+s)+N(s)$ به $N(s)$ و s بستگی ندارد)، پس، به نظر می رسد. که هر ذره بطور مستقل و با توزیعی فاقد حافظه عمل می کند. می دانیم توزیع منحصر به فرد عمر که فاقد حافظه باشد توزیع نمایی است و چون دقیقاً نصف مقدار جرم مفروض در هر h واحد زمان متلاشی می شود، الگوی احتمالی زیر را برای نابودی اجسام رادیو اکتیو پیشنهاد می کنیم.

تعبیر احتمالی نصف عمر h :عمر هر ذره یک متغیر تصادفی مستقل با توزیع عمر نمایی با میانگین h است، یعنی اگر L عمر یک ذره باشد داریم

$$P\{L < t\} = 1 - 2^{-t/h}$$

(چون $P\{L<h\} = \frac{1}{2}$ احتمال فوق را می توان به صورت زیر نوشت

$$P\{L < t\} = 1 - \exp\left\{-t\frac{\log 2}{h}\right\}$$

دیده می شود که L دارای توزیع نمایی با میانه h است).

باید توجه کرد که با این تعبیر احتمالی نیمه عمر، اگر با $N(0)$ ذره در زمان صفر شروع کنیم، آن گاه $N(t)$ تعدادذرات باقیمانده درزمان t دارای توزیع دوجمله ای باپارامترهای $n=N(0)$ و $p = 2^{-t/h}$ خواهد بود. نتایج فصل ۸ نشان می دهد که این تعبیر نصف عمر با الگوی تعیینی سازگار است وقتی نسبت زیادی از ذرات در یک زمان معین متلاشی می شوند. با وجود این، تفاوت بین تعبیر شهودی و احتمالی وقتی ظاهر می شود که تعداد واقعی ذرات متلاشی شده را درنظر بگیریم. این مطلب را با توجه به سؤال مربوط به متلاشی شدن پروتونها نشان خواهیم داد.

در بارهٔ متلاشی شدن پروتونها نظرات مختلف است. در واقع یک نظریه پیش بینی می کند که پروتونها باید تا نصف عمر در حدود $h = 10^{30}$ سال متلاشی شوند. برای این که این نظریه را بطور تجربی بررسی کنیم پیشنهاد شده است که تعداد زیادی پروتون را مثلاً برای دو سال در نظر بگیریم و امتحان کنیم که آیا پروتونها در این زمان متلاشی شده است یا خیر، (بدیهی است که در نظر گرفتن برخی از پروتونها به مدت 10^{30} سال) که نصف آنها متلاشی شود امکان پذیر نیست). فرض می کنیم بتوانیم $N(0)=10^{30}$ پروتون را برای c سال در نظر بگیریم. تعداد پروتونهای متلاشی شده که از الگوی تعیینی پیش بینی می شود به صورت زیر است

$$
\begin{aligned}
N(0) - N(c) &= h(1 - 2^{-c/h}) \\
&= \frac{1 - 2^{-c/h}}{1/h} \\
&\approx \lim_{x\to 0} (1 - 2^{-cx})/x \qquad \text{زیرا } 1/h = 10^{-30} \approx 0 \\
&= \lim_{x\to 0} (c2^{-cx} \log 2) \qquad \text{بنا به قاعدهٔ هوپیتال} \\
&= c\log 2 \approx .6931c
\end{aligned}
$$

مثلاً در دو سال الگوی تعیینی پیش‌بینی می کند که باید ۱٫۳۸۶۳ پرتون متلاشی شود. درنتیجه این فرض که نیمه عمر پروتونها 10^{30} سال است مورد سؤال خواهد بود زیرا در این صورت نباید در ۲ سال هیچگونه تلاشی صورت گیرد.

حال الگوی احتمالی را درنظر گرفته و فرض می کنیم نیمه عمر پروتونها همان $h = 10^{30}$ سال باشد، و h پروتون به مدت c سال مورد مطالعه قرارگیرد. چون تعداد پروتونهای مستقل بسیار زیاد است و هریک از آنها با احتمال خیلی کوچک در این فاصله زمانی متلاشی می شود نتیجه می گیریم که تعداد پروتونهای متلاشی شده (با تقریب بسیار خوب) دارای توزیع پواسن با پارامتر $h(1 - 2^{-c/h}) \approx c \log 2$ است. پس

$$
\begin{aligned}
P\,[\text{0 متلاشی شدن}] &= e^{-c\log 2} \\
&= e^{-\log(2^c)} = 1/2^c
\end{aligned}
$$

و بطور کلی

$$
P\,[\text{n متلاشی شدن}] = [c \log 2]^n/(2^c n!), \qquad n \geq 0
$$

همان طور که دیده می شود اگرچه متوسط تعداد پروتونهای متلاشی شده در دو سال (طبق الگوی پیش بینی شده) برابر ۱٫۳۸۶۳ است شانس ۱ در ۴ وجود دارد که هیچ تلاشی رخ ندهد، و نشان می دهد که نمی توان فرض اولیه تلاشی پروتونها را بی اعتبار خواند.

۳ - مجموع متغیرهای تصادفی مستقل

اغلب لازم است توزیع X + Y را به کمک توزیعهای X و Y وقتی این دو متغیر مستقل هستند، محاسبه کنیم. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل پیوسته با توابع چگالی f_X و f_Y باشند. تابع توزیع تجمعی X + Y به صورت زیر محاسبه می شود:

$$F_{X+Y}(a) = P\{X + Y \le a\}$$
$$= \iint_{x+y\le a} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{a-y} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{a-y} f_X(x)\,dx\,f_Y(y)\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y)f_Y(y)\,dy \qquad (۳-۱)$$

تابع توزیع تجمعی F_{X+Y} را پیچش توزیعهای F_X و F_Y (توابع توزیع تجمعی X و Y) نامند.

$$f_{X+Y}(a) = \frac{d}{da}\int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y)f_Y(y)\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{da}F_X(a-y)f_Y(y)\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)f_Y(y)\,dy \qquad (۳-۲)$$

مثال ۳ الف . مجموع دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت . اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در فاصلهٔ (0, 1) باشد، مطلوب است تابع چگالی X + Y .

حل : از معادلهٔ (۳-۲) با توجه به توابع چگالی زیر نتیجه می شود.

$$f_X(a) = f_Y(a) = \begin{cases} 1 & 0 < a < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به ازای $0 \le a \le 1$ داریم

$$f_{X+Y}(a) = \int_0^1 f_X(a-y)\,dy$$

به ازای $1 < a < 2$ داریم

$$f_{X+Y}(a) = \int_0^a dy = a$$

بنابراین

$$f_{X+Y}(a) = \int_{a-1}^1 dy = 2 - a$$

$$f_{X+Y}(a) = \begin{cases} a & 0 \le a \le 1 \\ 2-a & 1 < a < 2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به خاطر داشته باشید که متغیر تصادفی گاما دارای چگالی زیر است

$$f(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{t-1}}{\Gamma(t)} \qquad 0 < y < \infty$$

بلکه خاصیت مهم این خانواده از توزیعها این است که برای یک مقدار ثابت λ نسبت به عمل پیچش بسته است.

قضیهٔ ۳-۱

اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل گاما به ترتیب با پارامترهای (s, λ) و (t, λ) باشند، آن گاه $X + Y$ نیز یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای $(s + t, \lambda)$ خواهد بود.

اثبات: با استفاده از معادله (۳-۲) داریم

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(a) &= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(t)} \int_0^a \lambda e^{-\lambda(a-y)}[\lambda(a-y)]^{s-1}\lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{t-1}\, dy \\ &= Ke^{-\lambda a}\int_0^a (a-y)^{s-1}y^{t-1}\,dy \\ &= Ke^{-\lambda a}a^{s+t-1}\int_0^1 (1-x)^{s-1}x^{t-1}\,dx \qquad \text{با فرض} \quad x = \frac{y}{a} \\ &= Ce^{-\lambda a}a^{s+t-1} \end{aligned}$$

که در آن C یک مقدار ثابت است که به a بستگی ندارد. ولی چون تابع فوق یک تابع چگالی است انتگرال آن باید برابر ۱ باشد، پس از تعیین مقدار C داریم

$$f_{X+Y}(a) = \frac{\lambda e^{-\lambda a}(\lambda a)^{s+t-1}}{\Gamma(s+t)}$$

و نتیجه حاصل است.

حال به کمک قضیهٔ ۳-۱ و استقرا بآسانی ثابت می شود که اگر X_i، $i = 1, \ldots, n$، متغیرهای تصادفی مستقل گاما به ترتیب با پارامترهای (t_i, λ)، $i = 1, \ldots, n$ باشند آن گاه $\sum_{i=1}^{n} X_i$ یک متغیر تصادفی با توزیع گاما با پارامتر $(\sum_{i=1}^{n} t_i, \lambda)$ است. اثبات این حکم را

به خواننده واگذار می کنیم.

مثال ۳ ب. فرض کنید X_1 ، ... ، X_n ، n متغیر مستقل نمایی با پارامتر λ باشند. در این صورت چون یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ مانند یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای $(1, \lambda)$ است ، از قضیهٔ ۳-۱ نتیجه می شود که $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ دارای توزیع گاما با پارامترهای (n, λ) خواهد بود.

اگر Z_1 ، Z_2 ، ... ، Z_n متغیرهای تصادفی نرمال مستقل باشند در آن صورت $Y = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ را متغیر تصادفی کی دو (χ^2) با n درجه آزادی گویند. برای محاسبهٔ تابع چگالی آن به صورت زیر عمل می کنیم. به ازای $n = 1$ و $Y = Z_1^2$ از مثال ۶ ب فصل ۵ دیده می شود که تابع چگالی احتمال به صورت زیر است

$$f_{Z^2}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_Z(\sqrt{y}) + f_Z(-\sqrt{y})\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\, 2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y/2}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}e^{-(1/2)y}\left(\frac{1}{2}y\right)^{1/2-1}}{\sqrt{\pi}}$$

ولی این تابع را توزیع گاما با پارامترهای $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ می نامند. [یک نتیجهٔ ساده این فرمول $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ است]. ولی چون Z_i^2 دارای توزیع گاما با پارامترهای $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ است از قضیهٔ ۳-۱ نتیجه می شود که توزیع χ^2 با n درجه آزادی همان توزیع گاما با پارامترهای $\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ است و در نتیجه دارای تابع چگالی زیر است.

$$f_{\chi^2}(y) = \frac{\frac{1}{2}e^{-y/2}\left(\frac{y}{2}\right)^{n/2-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \qquad y > 0$$

$$= \frac{e^{-y/2}y^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \qquad y > 0$$

وقتی n یک عدد زوج است، $\Gamma(n/2) = [(n/2) - 1]!$ ، در صورتی که وقتی n فرد است $\Gamma(n/2)$ را با روش برگشتی به صورت $\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$ محاسبه می کنیم.

در این صورت با استفاده از $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ مقدار $\Gamma(t)$ به دست می‌آید. [برای مثال $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ برابر است با $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ [$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$].

توزیع کی دو اغلب در عمل از مربع خطای حاصل در برخورد یک تیر به هدف وقتی مختصات خطاها متغیرهای نرمال استاندارد مستقل هستند از فضای n بعدی حاصل می شود. این توزیع در آمار ریاضی نیز اهمیت دارد.

از معادلهٔ (۳-۲) می توان برای اثبات نتیجهٔ مهم زیر دربارهٔ متغیرهای تصادفی نرمال استفاده کرد.

قضیه ۳-۲

اگر X_i، $i = 1, \ldots, n$، متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال با پارامترهای μ_i و σ_i^2، $i = 1, 2, \ldots, n$ باشد آن گاه $\sum_{i=1}^{n} X_i$ دارای توزیع نرمال با پارامترهای $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ و $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$ است. اثبات قضیه را به عنوان تمرین می گذاریم.

اگر بخواهید یک عبارت کلی برای توزیع $X + Y$ در حالت گسسته به دست آورید به چند مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳ پ. مجموع دو متغیر تصادفی مستقل پواسن. اگر X و Y متغیرهای مستقل پواسن با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند مطلوب است توزیع $X + Y$.

حل: چون پیشامد $\{X + Y = n\}$ را می توان به صورت اجتماع پیشامدهای جدای $\{X = k, Y = n - k\}$، $0 \le k \le n$ نوشت، داریم.

$$
\begin{aligned}
P\{X + Y = n\} &= \sum_{k=0}^{n} P\{X = k, Y = n - k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P\{X = k\}P\{Y = n - k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1 + \lambda_2)^n
\end{aligned}
$$

به عبارت دیگر $X_1 + X_2$ نیز دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda_1 + \lambda_2$ است.

مثال ۳ ت. مجموع متغیرهای تصادفی مستقل دوجمله‌ای. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی دو جمله ای مستقل با پارامترهای (n , p) و (m , p) باشند. توزیع X + Y را محاسبه کنید.

حل: بدون هیچ محاسبه ای بآسانی نتیجه می شود که X + Y متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای (n + m, p) است. زیرا X تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل است که احتمال موفقیت در هریک از آنها برابر p است، همین طور Y تعداد موفقیتها در m آزمایش مستقل با احتمال موفقیت p است. بنابراین چون X و Y مستقل هستند، نتیجه می شود X + Y تعداد موفقیتها در n + m آزمایش مستقل با احتمال موفقیت p است. بنابراین X + Y یک متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای (n + m, p) خواهد بود. برای کنترل این نتیجه بطور تحلیلی توجه کنید که:

$$\begin{aligned} P\{X + Y = k\} &= \sum_{i=0}^{n} P\{X = i, Y = k - i\} \\ &= \sum_{i=0}^{n} P\{X = i\}P\{Y = k - i\} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} q^{m-k+i} \end{aligned}$$

که در آن $q = 1 - p$ و $\binom{r}{j} = 0$ اگر $j > r$، بنابراین

$$P\{X + Y = k\} = p^k q^{n+m-k} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

و نتیجه با استفاده از اتحاد زیر به دست می‌آید.

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

۴ - توزیعهای شرطی ـ حالت گسسته

به خاطر داشته باشید که برای هر دو پیشامد E و F احتمال شرطی E با فرض F وقتی

$P(F) > 0$ ، به صورت زیر تعریف می شود

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

بنابراین اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشد طبیعی است که تابع جرم احتمال X را با فرض $Y = y$ برای تمام y هایی که $P(Y = y) > 0$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x|y) &= P\{X = x | Y = y\} \\ &= \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}} \\ &= \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} \end{aligned}$$

برای تمام y ها به قسمی که $p_Y(y) > 0$. همین طور تابع توزیع احتمال شرطی با فرض $Y = y$ برای تمام y هایی که $p_Y(y) > 0$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x|y) &= P\{X \leq x | Y = y\} \\ &= \sum_{a \leq x} p_{X|Y}(a|y) \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، تعاریف عیناً شبیه حالت غیرشرطی است جز این که همه چیز روی پیشامد $Y = y$ شرطی شده است. اگر X از Y مستقل باشد، در این صورت تابع جرم احتمال شرطی و تابع توزیع شرطی دقیقاً مانند حالتهای غیر شرطی است. زیرا اگر X و Y مستقل باشند، آن گاه

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x|y) &= P\{X = x | Y = y\} \\ &= \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}} \\ &= \frac{P\{X = x\}P\{Y = y\}}{P\{Y = y\}} \\ &= P\{X = x\} \end{aligned}$$

مثال ۴ الف. فرض کنیدکه $p(x, y)$ ، تابع جرم احتمال توأم X و Y به صورت زیر داده شود،

$$p(0, 0) = .4 \qquad p(0, 1) = .2 \qquad p(1, 0) = .1 \qquad p(1, 1) = .3$$

تابع احتمال جرم شرطی X را با فرض $Y = 1$ محاسبه کنید.

حل : توجه کنید که

$$p_Y(1) = \sum_x p(x, 1) = p(0, 1) + p(1, 1) = .5$$

بنابراین

$$p_{X|Y}(0|1) = \frac{p(0, 1)}{p_Y(1)} = \frac{2}{5}$$

و

$$p_{X|Y}(1|1) = \frac{p(1, 1)}{p_Y(1)} = \frac{3}{5}$$

مثال ۴ ب. اگر X و Y متغیرهای تصادفی پواسن مستقل با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند توزیع شرطی X را با فرض $X + Y = n$ به دست آورید.

حل : تابع جرم احتمال X با فرض $X + Y = n$ به صورت زیر محاسبه می شود :

$$\begin{aligned} P\{X = k | X + Y = n\} &= \frac{P\{X = k, X + Y = n\}}{P\{X + Y = n\}} \\ &= \frac{P\{X = k, Y = n - k\}}{P\{X + Y = n\}} \\ &= \frac{P\{X = k\}P\{Y = n - k\}}{P\{X + Y = n\}} \end{aligned}$$

که در آن تساوی آخر از استقلال X و Y نتیجه می شود. با یادآوری (مثال ۳ پ) که X + Y دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda_1 + \lambda_2$ است می توان نوشت :

$$\begin{aligned} P\{X = k | X + Y = n\} &= \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!} \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n - k)!}\left[\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}\right]^{-1} \\ &= \frac{n!}{(n - k)!\,k!} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n} \\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

به عبارت دیگر توزیع شرطی X با فرض $X + Y = n$ یک توزیع دوجمله ای با پارامترهای n و $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ است .

۵ - توزیعهای شرطی ـ حالت پیوسته

اگر X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم f(x, y) باشند، آن گاه تابع چگالی احتمال شرطی X با فرض Y = y برای تمام مقادیر y به قسمی که $f_Y(y) > 0$ به صورت زیر تعریف می شود

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

برای این که تعریف فوق روشن شود، سمت چپ را در dx و سمت راست را در (dxdy) /dy ضرب می کنیم ، در این صورت داریم

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y)\, dx &= \frac{f(x, y)\, dx\, dy}{f_Y(y)\, dy} \\ &\approx \frac{P\{x \le X \le x + dx, y \le Y \le y + dy\}}{P\{y \le Y \le y + dy\}} \\ &= P\{x \le X \le x + dx | y \le Y \le y + dy\} \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، برای مقادیر کوچک dx و dy ، $f_{X|Y}(x|y)$ احتمال شرطی X را بین x و x + dx با شرط Y بین y و y + dy می دهد.

استفاده از متغیرهای تصادفی به ما این امکان را می دهد که احتمال شرطی پیشامدها را وقتی مقدار متغیر دوم داده شده باشد در ارتباط با متغیرهای تصادفی بررسی کنیم. یعنی اگر X و Y دارای چگالی توأم پیوسته باشد برای هر پیشامد A داریم

$$P\{X \in A | Y = y\} = \int_A f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

بخصوص با فرض $A = (-\infty, a]$ ، می توانیم تابع توزیع شرطی X را با فرض Y = y تعریف کنیم

$$F_{X|Y}(a|y) \equiv P\{X \le a | Y = y\} = \int_{-\infty}^{a} f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

توجه دارید که با استفاده از این ایده می توان عبارات قابل استفاده برای احتمالهای شرطی ارائه داد حتی اگر پیشامد شرطی (یعنی پیشامد {Y = y} ، دارای احتمال 0 باشد.

مثال ۵ الف. چگالی توأم X و Y به صورت زیر داده شده است.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{5}x(2 - x - y) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

چگالی شرطی X را با فرضی $Y = y$ ، $0 < y < 1$ ، محاسبه کنید .

حل : برای $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$ داریم .

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx} \\ &= \frac{x(2 - x - y)}{\int_0^1 x(2 - x - y)\, dx} \\ &= \frac{x(2 - x - y)}{\frac{2}{3} - y/2} \\ &= \frac{6x(2 - x - y)}{4 - 3y} \end{aligned}$$

مثال ۵ ب . فرض کنید چگالی توأم X و Y به صورت زیر است .

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبهٔ $P\{X > 1 | Y = y\}$

حل : ابتدا چگالی شرطی X را با فرض $Y = y$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{e^{-x/y}e^{-y}/y}{e^{-y}\int_0^{\infty} (1/y)e^{-x/y}\, dx} \\ &= \frac{1}{y}e^{-x/y} \end{aligned}$$

بنابراین

$$P\{X > 1 \mid Y = y\} = \int_1^{\infty} \frac{1}{y} e^{-x/y}\, dx$$
$$= -e^{-x/y} \Big|_1^{\infty}$$
$$= e^{-1/y}$$

اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوستهٔ مستقل باشند چگالی شرطی X با فرض $Y = y$ دقیقاً برابر است با چگالی X . زیرا در حالت استقلال متغیرها داریم

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x) f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

توزیعهای شرطی را، وقتی متغیرهای تصادفی توأم گسسته یا پیوسته نباشد، نیز می توان محاسبه کرد. مثلاً فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی f و N متغیر تصادفی گسسته باشد. حال توزیع X را با فرض $N = n$ در نظر می گیریم

$$\frac{P\{x < X < x + dx | N = n\}}{dx}$$
$$= \frac{P\{N = n | x < X < x + dx\}}{P\{N = n\}} \frac{P\{x < X < x + dx\}}{dx}$$

اگر dx به 0 میل کند داریم

$$\lim_{dx \to 0} \frac{P\{x < X < x + dx | N = n\}}{dx} = \frac{P\{N = n | X = x\}}{P\{N = n\}} f(x)$$

که نشان می دهد چگالی شرطی x با فرض $N = n$ به صورت زیر است

$$f_{X|N}(x|n) = \frac{P\{N = n | X = x\}}{P\{N = n\}} f(x)$$

مثال ۵ پ. تعداد $n + m$ آزمایش را در نظر بگیرید که احتمال موفقیت برای آنها یکسان است، حال فرض کنید این احتمال موفقیت از قبل ثابت فرض شده است که ما می دانیم از جمعیت یکنواخت در فاصله (۱ و ۰) انتخاب شده است. توزیع شرطی احتمال موفقیت با فرض این که در $n + m$ آزمایش 0 موفقیت به‌دست آمده است به چه صورت خواهد بود؟

حل : اگر X احتمال موفقیت آزمایش باشد در آن صورت X دارای توزیع یکنواخت

در فاصله (۱ و ۰) است. همچنین به ازای $X = x$ ، $n + m$ آزمایش مستقل بوده و احتمال موفقیت هریک برابر x خواهد بود، در نتیجه N ، تعداد موفقیتها، دارای توزیع دوجمله ای با پارامترهای $(n + m, x)$ است. بنابراین چگالی شرطی X با فرض $N = n$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} f_{X|N}(x|n) &= \frac{P\{N = n|X = x\}f_X(x)}{P\{N = n\}} \\ &= \frac{\binom{n+m}{n} x^n(1-x)^m}{P\{N = n\}} \qquad 0 < x < 1 \\ &= cx^n(1-x)^m \end{aligned}$$

که درآن c به n بستگی ندارد. پس چگالی شرطی یک متغیر تصادفی بتا با پارامتر $n + 1$ و $m + 1$ است.

نتیجه فوق خیلی جالب است، زیرا بیان می کند که اگر توزیع اولیه یا پیشین (قبل از جمع آوری داده ها) احتمال موفقیت یک آزمایش یکنواخت در فاصله (۱ و ۰) باشد [یا بطور معادل دارای توزیع بتا با پارامترهای (۱ و ۱) باشد] ، آن گاه توزیع پسین (یا شرطی) با فرض n موفقیت در $n + m$ آزمایش دارای توزیع بتا با پارامترهای ($m + ۱$ و $n + ۱$) خواهد بود. این نتیجه گیری با ارزش است زیرا درك شهودی ما را نسبت به یک متغیر تصادفی با توزیع بتا زیادتر می کند.

۶- آماره های ترتیبی

فرض کنید X_1 ، X_2 ، ... ، X_n ، n متغیر تصادفی پیوسته مستقل و همتوزیع با چگالی مشترك f و تابع توزیع F می باشند. تعریف می کنیم

$X_{(1)} =$ کمترین $X_1, X_2, \ldots, X_n$
$X_{(2)} =$ دومین مقدار کمتر $X_1, X_2, \ldots, X_n$
$\vdots$
$X_{(j)} =$ j امین مقدار کمتر $X_1, X_2, \ldots, X_n$
$\vdots$
$X_{(n)} =$ بزرگترین $X_1, X_2, \ldots, X_n$

مقادیر مرتب شده $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \dots \le X_{(n)}$ را آماره های ترتیبی متناظر با متغیرهای تصادفی X_1 ، X_2 ، ... ، X_n می نامند. به عبارت دیگر $X_{(1)}$ ، $X_{(2)}$ ، ... ، $X_{(n)}$ مقادیر مرتب شده X_1 ، X_2 ، ... ، X_n هستند.

تابع چگالی توأم آماره های ترتیبی باتوجه به این که آماره های ترتیبی $X_{(1)}$ ، $X_{(2)}$ ، ... ، $X_{(n)}$ مقادیر $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$ رافقط وقتی اختیارمی کنندکه برای جایگشتی مانند $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ از $(1, 2, \dots, n)$ داشته باشیم

$$X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \dots, X_n = x_{i_n}$$

چون برای هر جایگشت $(i_1, \dots, i_n)$ از $(1,2, \dots, n)$ داریم

$$\begin{aligned} P\left\{x_{i_1} - \frac{\varepsilon}{2} < X_1 < x_{i_1} + \frac{\varepsilon}{2}, \dots, x_{i_n} - \frac{\varepsilon}{2} < X_n < x_{i_n} + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ \approx \varepsilon^n f_{X_1,\dots,X_n}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \\ = \varepsilon^n f(x_{i_1}) \cdots f(x_{i_n}) \\ = \varepsilon^n f(x_1) \cdots f(x_n) \end{aligned}$$

دیده می شود که برای $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

$$\begin{aligned} P\left\{x_1 - \frac{\varepsilon}{2} < X_{(1)} < x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, \dots, x_n - \frac{\varepsilon}{2} < X_{(n)} < x_n + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ \approx n!\, \varepsilon^n f(x_1) \cdots f(x_n) \end{aligned}$$

اگر طرفین را بر ε^n تقسیم کنیم و $\varepsilon \to 0$ ، آن گاه

$$f_{X_{(1)},\dots,X_{(n)}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! f(x_1) \cdots f(x_n) \qquad x_1 < x_2 < \cdots < x_n \tag{۱-۶}$$

معادلهٔ (۱-۶) را می توان بطور ساده تر نیز به دست آورد. به این ترتیب که شرط لازم و کافی برای آن که بردار $<X_{(1)}, \dots, X_{(n)}>$ با بردار $<x_1, \dots, x_n>$ ، برابر شود آن است که بردار $<X_1, \dots, X_n>$ با یکی از $n!$ جایگشت $<x_1, \dots, x_n>$ برابر شود و چون احتمال (چگالی) این که $<X_1, \dots, X_n>$ با هریک ازجایگشتها $<x_1, \dots, x_n>$ برابرشودبرابر $f(x_1) \dots f(x_n)$ است، معادله (۶-۱) نتیجه می شود.

مثال ۶ الف. در امتداد جاده‌ای به طول ۱ مایل سه نفر «به تصادف» قرار می‌گیرند. احتمال این که دو نفر به فاصلهٔ کمتر از d مایل از یکدیگر قرارنگیرند چقدر است درصورتی که $d \le \frac{1}{2}$.

حل : فرض می کنیم «توزیع تصادفی» افراد روی جاده به این معناست که قرار گرفتن سه نفر روی جاده مستقل از یکدیگر و دارای توزیع یکنواخت است. اگر X_i موفقیت نفر i ام باشد احتمال مطلوب برابر است با $P\{X_{(i)} > X_{(i-1)} + d, i = 1, 2, 3\}$. چون

$$f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x_1, x_2, x_3) = 3! \qquad 0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
P\{X_{(i)} > X_{(i-1)} + d, i = 2, 3\} &= \iiint\limits_{\substack{x_i > x_{i-1} + d \\ i = 2,3}} f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \\
&= 3! \int_0^{1-2d} \int_{x_1+d}^{1-d} \int_{x_2+d}^{1} dx_3\, dx_2\, dx_1 \\
&= 6 \int_0^{1-2d} \int_{x_1+d}^{1-d} (1 - d - x_2)\, dx_2\, dx_1 \\
&= 6 \int_0^{1-2d} \int_0^{1-2d-x_1} y_2\, dy_2\, dx_1
\end{aligned}$$

که در آن از تغییر متغییر $y_2 = 1 - d - x_2$ استفاده شده است. بنابراین پس از محاسبه داریم

$$\begin{aligned}
&= 6 \int_0^{1-2d} \frac{(1 - 2d - x_1)^2}{2}\, dx_1 \\
&= 6 \int_0^{1-2d} \frac{y_1^2}{2}\, dy_1 \\
&= (1 - 2d)^3
\end{aligned}$$

پس احتمال مطلوب که دو نفر از سه نفر در فاصله کمتر از d از یکدیگر قرار نگیرند برابر $(1-2d)^3$ است. در واقع با همین روش می توان ثابت کرد که در حالت n شئ این احتمال برابر است با (تمرین)

$$[1 - (n-1)d]^n \qquad \text{وقتی } d \le \frac{1}{n-1}$$

تابع چگالی آماره ترتیبی j ام، $X_{(j)}$ را می توان با انتگرال گیری از تابع چگالی توأم

(۶-۱) یا مستقیماً با روش زیر به دست آورد : برای آن که $X_{(j)}$ برابر x شود لازم است j - 1 مقدار از n مقدار X_1 ، . . . ، X_n کمتر از x و n - j تا بزرگتر از x و یکی از آنها برابر x باشد. حال چگالی احتمال این پیشامدها برابر است با

$$[F(x)]^{j-1}[1-F(x)]^{n-j}f(x)$$

بنابراین چون تعداد

$$\binom{n}{j-1,\, n-j,\, 1} = \frac{n!}{(n-j)!\,(j-1)!}$$

افراز متفاوت n متغیر تصادفی X_1 , . . . , X_n به سه گروه وجود دارد، تابع چگالی $X_{(j)}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(n-j)!\,(j-1)!}[F(x)]^{j-1}[1-F(x)]^{n-j}f(x) \qquad (۶-۲)$$

مثال ۶ ب. وقتی نمونه‌ای از 2n + 1 متغیر تصادفی (یعنی 2n + 1 متغیر تصادفی مستقل همتوزیع) را در نظر می گیریم، متغیر مرتب n + 1ام میانه نمونه نامیده می شود. اگر نمونه‌ای به حجم ۳ از توزیع یکنواخت در فاصله (0, 1) انتخاب کنیم، احتمال این که میانه نمونه بین $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ قرار گیرد چقدر است.

حل : از معادلهٔ (۶-۲) تابع چگالی $X_{(2)}$ به صورت زیر نوشته می شود

$$f_{X_{(2)}}(x) = \frac{3!}{1!\,1!}x(1-x) \qquad 0 < x < 1$$

بنابر این

$$P\{\tfrac{1}{4} < X_{(2)} < \tfrac{3}{4}\} = 6\int_{1/4}^{3/4} x(1-x)\,dx$$
$$= 6\left\{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right\}\Bigg|_{x=1/4}^{x=3/4} = \frac{11}{16}$$

توزیع تجمعی تابع $X_{(j)}$ را می توان با انتگرال گیری (۶-۲) به دست آورد.

یعنی

$$F_{X_{(j)}}(y) = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}\int_{-\infty}^{y}[F(x)]^{j-1}[1-F(x)]^{n-j}f(x)\,dx \qquad (۶-۳)$$

با وجود این $F_{X_{(j)}}(y)$ را مستقیماً نیز می توان به دست آورد، به این ترتیب که آماره ترتیبی j ام کمتر یا مساوی y است اگر و فقط اگر j متغیر یا بیشتر یا کمتر یا مساوی y باشد. بنابراین چون تعداد X_i های کمتر یا مساوی y یک متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای $[n, p = F(y)]$ است، نتیجه می شود

$$\begin{aligned} F_{X_{(j)}}(y) &= P\{X_{(j)} \le y\} = P\{\text{تا } j \text{ یا بیشتر } X_i \text{ ها} \le y\} \\ &= \sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}[F(y)]^{k}[1-F(y)]^{n-k} \end{aligned} \qquad (۶-۴)$$

اگر در معادلات (۶-۳) و (۶-۴) F تابع یکنواخت در فاصله (۰ و ۱) باشد[یعنی $F(x) = x\ ,\ 0 < x < 1$]، آن گاه اتحاد مهم زیر به دست می آید

$$\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}y^{k}(1-y)^{n-k} = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}\int_{0}^{y}x^{j-1}(1-x)^{n-j}\,dx \qquad 0 \le y \le 1 \qquad (۶-۵)$$

همان طور که معادلهٔ (۶-۲) اثبات شد می توان نشان داد که تابع چگالی توأم آماره های ترتیبی $X_{(i)}$ و $X_{(j)}$، $i < j$ عبارت است از

$$\begin{aligned} f_{X_{(i)},X_{(j)}}(x_i, x_j) &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} \\ &\times [F(x_i)]^{i-1}[F(x_j)-F(x_i)]^{j-i-1}[1-F(x_j)]^{n-j}f(x_i)f(x_j) \end{aligned} \qquad (۶-۶)$$

در صورتی که $x_i < x_j$.

مثال ۶ پ. توزیع دامنهٔ یك نمونهٔ تصادفی. n متغیر تصادفی مستقل همتوزیع X_1 ، ... ، X_n را در نظر بگیرید. متغیر تصادفی R را که به صورت $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ تعریف می شود **دامنهٔ متغیرهای تصادفی** نامند. اگر متغیرهای تصادفی X_i دارای توزیع F و چگالی f باشد، توزیع R را می توان از معادله (۶-۶) به صورت زیر محاسبه کرد، برای $a > 0$ داریم

$$P\{R \le a\} = P\{X_{(n)} - X_{(1)} \le a\}$$
$$= \iint_{x_n - x_1 \le a} f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x_1, x_n)\, dx_1\, dx_n$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1}^{x_1+a} \frac{n!}{(n-2)!}[F(x_n) - F(x_1)]^{n-2} f(x_1) f(x_n)\, dx_n\, dx_1$$

با استفاده از تغییر متغیر $y = F(x_n) - F(x_1)$ ، $dy = f(x_n)dx_n$ می‌توان نوشت :

$$\int_{x_1}^{x_1+a} [F(x_n) - F(x_1)]^{n-2} f(x_n)\, dx_n = \int_0^{F(x_1+a)-F(x_1)} y^{n-2}\, dy$$
$$= \frac{1}{n-1}[F(x_1 + a) - F(x_1)]^{n-1}$$

در نتیجه

$$P\{R \le a\} = n \int_{-\infty}^{\infty} [F(x_1 + a) - F(x_1)]^{n-1} f(x_1)\, dx_1 \qquad (۷-۶)$$

معادلهٔ (۶-۷) را می توان مستقیماً در چند حالت خاص به دست آورد . یکی از این حالتها وقتی است که X_i ها دارای توزیع یکنواخت در فاصله (0 , 1) است .

در این حالت معادله (۶-۷) به صورت زیر در می‌آید ، به ازای $0 < a < 1$ ،

$$P\{R < a\} = n \int_0^1 [F(x_1 + a) - F(x_1)]^{n-1} f(x_1)\, dx_1$$
$$= n \int_0^{1-a} a^{n-1}\, dx_1 + n \int_{1-a}^{1} (1 - x_1)^{n-1}\, dx_1$$
$$= n(1-a)a^{n-1} + a^n$$

اگر از طرفین مشتق بگیریم تابع چگالی دامنه به دست می آید :

$$f_R(a) = \begin{cases} n(n-1)a^{n-2}(1-a) & 0 \le a \le 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۷ـ توزیع احتمال توأم توابعی از متغیرهای تصادفی

فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی پیوسته باتابع چگالی احتمال توأم f_{X_1, X_2} باشد، اغلب لازم است که توزیع توأم متغیرهای Y_1 و Y_2 را (که بر حسب) توابعی از X_1 و X_2 هستند محاسبه کنیم. بخصوص فرض کنید $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$ ، $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$.

فرض کنید توابع g_1 و g_2 در شرایط زیر صدق می کنند:

۱- از معادلات $y_1 = g_1 (x_1 , x_2)$ و $y_2 = g_2 (x_1, x_2)$ می توان به صورت منحصر به فرد x_1 ، x_2 را بر حسب y_1 ، y_2 محاسبه کرد: $x_1 = h_1 (y_1, y_2)$ ، $x_2 = h_2 (y_1, y_2)$.

۲ - توابع g_1 و g_2 در هر نقطه (x_1 , x_2) دارای مشتقات نسبی پیوسته است به قسمی که دترمینان ۲ × ۲ زیر در تمام نقاط (x_1 , x_2) مخالف صفر باشد،

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_2}{\partial x_2} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_1} \neq 0$$

با این دو شرط می توان نشان داد که متغیرهای تصادفی Y_1 و Y_2 پیوسته دارای چگالی توأم زیر است

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)|J(x_1, x_2)|^{-1} \tag{۱-۷}$$

که در آن $x_1 = h_1 (y_1, y_2)$ ، $x_2 = h_2 (y_1, y_2)$.

یک روش اثبات معادلهٔ (۷-۱) به قرار زیر است:

$$P\{Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2\} = \iint\limits_{\substack{(x_1, x_2): \\ g_1(x_1, x_2) \le y_1 \\ g_2(x_1, x_2) \le y_2}} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \tag{۲-۷}$$

حال تابع چگالی توأم را می توان با مشتق گیری از معادلهٔ (۷ - ۲) نسبت به y_1 و y_2 به دست آورد. اثبات این که مشتق حاصله برابر سمت راست معادلهٔ (۷ - ۱) است تمرینی در ریاضیات پیشرفته است که در این جا از آن صرف نظر می کنیم.

مثال ۷ الف. فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f_{X_1, X_2} باشد. همچنین فرض کنید $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_1 - X_2$. تابع چگالی توأم Y_1 و Y_2 را برحسب f_{X_1, X_2} به دست آورید.

حل : فرض کنید $g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ و $g_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. در این صورت

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

همچنین چون معادلات $y_1 = x_1 + x_2$ و $y_2 = x_1 - x_2$ دارای جوابهای $x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$ و $x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}$ است. از معادلهٔ (۷-۱) نتیجه می شود که چگالی مطلوب برابر است با

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2} f_{X_1, X_2}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$$

مثلاً اگر X_1 و X_2 مستقل با توزیع یکنواخت بر $(0,1)$ باشند آن گاه

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le y_1 + y_2 \le 2, 0 \le y_1 - y_2 \le 2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

یا اگر X_1 ، X_2 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی با پارامترهای λ_1 و λ_1 باشد آن گاه

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} \exp\left\{-\lambda_1\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) - \lambda_2\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)\right\} & y_1 + y_2 \ge 0, y_1 - y_2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

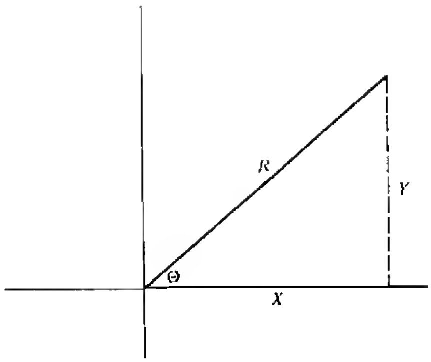
بالاخره اگر X_1 و X_2 مستقل با توزیع نرمال استاندارد باشند آن گاه

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= \frac{1}{4\pi} e^{-[(y_1+y_2)^2/8 + (y_1-y_2)^2/8]} \\ &= \frac{1}{4\pi} e^{-(y_1^2 + y_2^2)/4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-y_1^2/4} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-y_2^2/4} \end{aligned}$$

یعنی در این حالت $X_1 + X_2$ و $X_1 - X_2$ مستقل هستند (در واقع می توان نشان داد که اگر X_1 و X_2 مستقل با تابع توزیع مشترك F باشند آن گاه $X_1 + X_2$ و $X_1 - X_2$ مستقل هستند اگر و فقط اگر F تابع توزیع نرمال باشد.

مثال ۷ ب. فرض کنید (X, Y) مختصات یک نقطهٔ تصادفی باشد که در آن X و Y مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد هستند. می خواهیم توزیع توأم R و Θ مختصات قطبی این نقطه

را پیدا کنیم (شکل ۶-۳)



شکل ۶-۳ x = نقطه تصادفی و θ و $R = (X\,,\,Y)$

با فرض $r = g_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = g_2(x, y) = \tan^{-1} y / x$ دیده می شود که

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y} = \frac{1}{x[1+(y/x)^2]} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

بنابراین

$$J(x, y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}$$

چون تابع چگالی توأم X و Y برابر است با

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$$

تابع چگالی توأم R و θ به صورت زیر خواهد بود

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2/2} \qquad 0 < \theta < 2\pi \qquad 0 < r < \infty$$

چون این تابع چگالی به چگالیهای R و θ تجزیه می شود نتیجه می گیریم که R و θ متغیرهای تصادفی مستقل هستند، که در آن θ دارای توزیع یکنواخت بر فاصله $(0\,,\,2\,\pi)$ و R دارای

توزیع ریلی با چگالی زیر است

$$f(r) = re^{-r^2/2} \qquad 0 < r < \infty$$

پس وقتی به سمت هدفی در یک صفحه شلیک می شود اگر فاصله افقی و قائم نقطه برخورد متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال استاندارد باشند، آن گاه قدر مطلق خطا دارای توزیع ریلی فوق است.

نتیجه فوق بسیار جالب است زیرا از قبل معلوم نیست که یک بردار تصادفی که مختصات آن مستقل با توزیع نرمال استاندارد باشد با محورها زاویه ای می سازد که نه تنها دارای توزیع یکنواخت است بلکه از فاصلهٔ آن تا مبدأ نیز مستقل است.

اگر توزیع توأم R^2 و Θ لازم باشد. با توجه به تبدیل $d = g_1(x, y) = x^2 + y^2$ و $\theta = g_2(x, y) = \tan^{-1} y / x$ ژاکوبی زیر به دست می آید

$$J = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = 2$$

می بینیم که

$$f_{R^2,\Theta}(d, \theta) = \frac{1}{2} e^{-d/2} \frac{1}{2\pi} \qquad 0 < d < \infty, 0 < \theta < 2\pi$$

بنابراین R^2 و θ نیز مستقل هستند، و R^2 دارای توزیع نمایی باپارامتر $\frac{1}{2}$ است چون $R^2 = X^2 + Y^2$ بنا به تعریف R^2 دارای توزیع کی دو با ۲ درجه آزادی است. در نتیجه ثابت می شود که توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{2}$ همان توزیع کی دو با ۲ درجه آزادی است.

نتیجه فوق را می توان برای شبیه سازی (تولید) متغیرهای تصادفی نرمال با یک تغییر متغیر مناسب روی متغیرهای تصادفی نرمال مورد استفاده قرار داد. فرض کنید U_1 و U_2 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت روی (۰ ، ۱) باشد. متغیرهای U_1 و U_2 را به دو متغیر تصادفی نرمال استاندارد X_1 و X_2 تبدیل می کنیم به این طریق که ابتدا مختصات قطبی متناظر با بردار تصادفی (X_1, X_2) را در نظر می گیریم. با توجه به مطالب فوق R^2 و Θ (R, Θ) مستقل خواهند بود، و علاوه بر این $R^2 = X^2_1 + X^2_2$ دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ است. ولی $-2 \log U_1$ نیز دارای همین توزیع است. زیرا برای $n > 0$

$$
\begin{aligned}
P\{-2\log U_1 < x\} &= P\left\{\log U_1 > -\frac{x}{2}\right\} \\
&= P\{U_1 > e^{-x/2}\} \\
&= 1 - e^{-x/2}
\end{aligned}
$$

چون $2\pi\, U_2$ در فاصله $(0, 2\pi)$ دارای توزیع یکنواخت است می توانیم آن را برای تولید Θ به کار بریم . یعنی اگر بنویسیم

$$
\begin{aligned}
R^2 &= -2\log U_1 \\
\Theta &= 2\pi U_2
\end{aligned}
$$

آن گاه R^2 برابر است با مجذور فاصله تا مبداء و θ زاویه (X_1, X_2) را مشخص می سازد . چون $X_1 = R\cos\Theta$ و $X_2 = R\sin\Theta$ ، داریم

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \sqrt{-2\log U_1}\cos(2\pi U_2) \\
X_2 &= \sqrt{-2\log U_1}\sin(2\pi U_2)
\end{aligned}
$$

که متغیرهای مستقل نرمال استاندارد هستند .

مثال ۷ پ. اگر X و Y متغیرهای مستقل با توزیع گاما با پارامترهای (α, λ) و (β, λ) باشد مطلوب است چگالی توأم $U = X + Y$ و $V = \frac{X}{X+Y}$.

حل : چگالی توأم X و Y به صورت زیر داده می شود

$$
\begin{aligned}
f_{X,Y}(x, y) &= \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{\lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \\
&= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, e^{-\lambda(x+y)} x^{\alpha-1} y^{\beta-1}
\end{aligned}
$$

حال با فرض $g_1(x, y) = x + y$ و $g_2(x, y) = \frac{x}{x = y}$ ، آن گاه

$$
\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{y}{(x+y)^2} \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y} = -\frac{x}{(x+y)^2}
$$

در نتیجه

$$
J(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{y}{(x+y)^2} & -\frac{x}{(x+y)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x+y}
$$

بالاخره ، چون معادلات $u = x = y$ ، $v = \frac{x}{x+y}$ دارای جوابهای $x = uv$ و $y = u(1-v)$ هستند دیده می شود که

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}[uv, u(1-v)]u$$
$$= \frac{\lambda e^{-\lambda u}(\lambda u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

بنابراین $X + Y$ و $\frac{X}{X+Y}$ مستقل هستند و $X + Y$ دارای توزیع گاما با پارامتر $(\alpha + \beta, \lambda)$ و $\frac{X}{X+Y}$ دارای توزیع بتا با پارامترهای (α, b) است . مطالب فوق نشان می دهند که $B(\alpha, \beta)$ ضریب چگالی به قسمی است که در شرط زیر صدق می کند

$$B(\alpha, \beta) \equiv \int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\, dv$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

نتیجه فوق کاملاً جالب توجه است . زیرا فرض کنید $m + n$ آزمایش باید انجام شود که هریک از زمانی با توزیع نمایی و پارامتر λ پیروی می کند و فرض کنید دو نفر باید این آزمایشها را انجام دهند . نفر اول آزمایشهای ۱ ، ۲ ، . . . ، n ونفر دوم m آزمایش باقیمانده را انجام می دهد . اگر X و Y زمان کل صرف شده به وسیله نفر اول و دوم باشد آن گاه (از نتیجه فوق یا ازمثال ۳ ب) X و Y متغیرهای تصادفی مستقل گاما با پارامترهای (n, λ) و (m, λ) هستند . در این صورت نسبتی از این کار که به وسیله نفر اول انجام می شود دارای توزیع بتا با پارامترهای (n, m) است .

وقتی تابع چگالی توأم n متغیر تصادفی X_1 ، X_2 ، . . . ، X_n معلوم باشد می توانیم تابع چگالی توأم متغیرهای Y_1 ، Y_2 ، . . . ، Y_n را مانند قبل محاسبه کنیم .

$$Y_1 = g_1(X_1, \ldots, X_n) \qquad Y_2 = g_2(X_1, \ldots, X_n), \ldots$$
$$Y_n = g_n(X_1, \ldots, X_n)$$

در این حالت نیز فرض می کنیم توابع g_i دارای مشتقات نسبی پیوسته و ژاکوبی متناظر به ازای تمام نقاط $(x_1, \ldots, x_n)$ مخالف صفر باشد ، یعنی

$$J(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

علاوه بر این ، فرض می کنیم معادلات

$$y_1 = g_1(x_1, \ldots, x_n),\ \ y_2 = g_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots,\ y_n = g_n(x_1, \ldots, x_n)$$

دارای جواب منحصر به فرد زیر باشد

$$x_1 = h_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n = h_n(y_1, \ldots, y_n).$$

با این فرضها تابع چگالی متغیرهای تصادفی Y_i عبارتند از

$$f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)|J(x_1, \ldots, x_n)|^{-1} \qquad (۳-۷)$$

که در آن $x_i = h_i(y_1, \ldots, y_n)$ ، $i = 1, 2, \ldots, n$

مثال ۷ ت . فرض کنید X_1 ، X_2 و X_3 متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد باشند . اگر

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3,\ \ Y_2 = X_1 - X_2,\ \ Y_3 = X_1 - X_3,$$

مطلوب محاسبه تابع چگالی توأم Y_1 ، Y_2 ، Y_3 .

حل : ژاکوبی تبدیل فوق برابر است با

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

حال با توجه به تبدیلات فوق داریم

$$X_1 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3} \qquad X_2 = \frac{Y_1 - 2Y_2 + Y_3}{3} \qquad X_3 = \frac{Y_1 + Y_2 - 2Y_3}{3}$$

و از معادلهٔ (۷-۳) معلوم می شود که

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{3} f_{X_1,X_2,X_3}\left(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 - 2y_3}{3}\right)$$

بنابراین ، چون

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\sum_{i=1}^{3} x_i^2/2}$$

دیده می شود که

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{3(2\pi)^{3/2}} e^{-Q(y_1,y_2,y_3)/2}$$

که در آن

$$Q(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2 - 2y_3}{3}\right)^2$$
$$= \frac{y_1^2}{3} + \frac{2}{3} y_2^2 + \frac{2}{3} y_3^2 - \frac{2}{3} y_2 y_3 .$$

تمرینات نظری

۱- معادله (۱-۲) را ثابت کنید .

۲- فرض کنید که تعداد پیشامدهای رخ داده در یک فاصله زمانی معینی یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ است . اگر هر پیشامد را با احتمال p_i از نوع i بدانیم به قسمی که $\sum_i^n p_i = 1$ ، ثابت کنید تعداد پیشامدهای نوع i ، $i = 1, ..., n$ متغیرهای تصادفی مستقل پواسن با پارامترهای λp_i ، $i = 1, ..., n$ است .

۳- روشی را پیشنهاد کنید که با استفاده از مسأله سوزن بوفن مقدار Π را برآورد کنیم . تعجب نکنید که روزگاری این روش معمولی ترین روش محاسبه Π بوده است .

۴- مسأله سوزن بوفن را در حالت $L > D$ حل کنید .

جواب : $\frac{2\theta}{\pi} + \frac{2L}{\pi D}(1 - \sin\theta)$ که در آن θ به قسمی است که $\cos\theta = \frac{D}{L}$.

۵- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل مثبت و پیوسته باشد مطلوب است تابع چگالی (الف) $Z = X/Y$ و (ب) $Z = XY$ برحسب تابع چگالی X و Y . این عبارات را در حالت خاصی که X و Y هر دو متغیرهای نمایی هستند محاسبه کنید .

۶- به صورت تحلیلی (به استقرا) ثابت کنید که $X_1 + ... + X_n$ دارای توزیع دوجمله ای منفی است اگر X_i ، $i = 1, ..., n$ متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با توزیع هندسی باشند . همچنین یک روش استدلال دیگری را ارائه دهیدکه احتیاج به هیچ محاسبه ای نداشته باشد .

۷- (الف) اگر X دارای توزیع گاما با پارامترهای (t, λ) باشد ، تابع توزیع cX ، $c > 0$ را پیدا کنید .

$\frac{1}{2\lambda} \chi^2_{2n}$

(ب) ثابت کنید اگر n یک عدد صحیح مثبت و χ^2_{2n} یک متغیر تصادفی کی دو با 2n درجه آزادی باشد آن گاه $\frac{1}{2\lambda}\chi^2_{2n}$ دارای توزیع گاما با پارامترهای n و λ است .

۸- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل پیوسته با توابع نرخ $\lambda_X(t)$ و $\lambda_Y(t)$ باشند ، و فرض کنید $W = \text{Min}(X, Y)$.

(الف) تابع توزیع W را برحسب توابع X و Y معین کنید .

(ب) ثابت کنید $\lambda_W(t)$ تابع نرخ W به صورت زیر است

$$\lambda_W(t) = \lambda_X(t) + \lambda_Y(t)$$

۹- فرض کنید X_1 ، . . . ، X_n متغیرهای تصادفی نمایی مستقل با پارامتر مشترک λ باشند . توزیع $\text{Min}(X_1, \ldots, X_n)$ را معین کنید .

۱۰- عمر باطریها متغیرهای تصادفی نمایی مستقل با پارامتر مشترک λ است . یک نورافکن از دو باطری استفاده می کند . اگر کسی یک نورافکن و n باطری داشته باشد توزیع زمانی که نورافکن می تواند کار کند چگونه است ؟

۱۱- فرض کنید X_1 ، . . . ، X_5 متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل با توزیع مشترک f باشد ، قرار می دهیم

$$I = P\{X_1 < X_2 > X_3 < X_4 > X_5\}$$

(الف) ثابت کنید I به F بستگی ندارد . **راهنمایی** : I را به صورت یک انتگرال ۵ بُعدی بنویسید و از تغییر متغیر $u_i = F(x_i)$ ، $i = 1, \ldots, 5$ استفاده کنید .

(ب) مقدار I را محاسبه کنید .

۱۲- قضیه ۳-۲ را ثابت کنید .

راهنمایی : ابتدا آن را برای $n = 2$ ثابت کنید سپس از استقرا استفاده کنید .

۱۳- در مثال ۵ پ چگالی شرطی احتمال موفقیت دنباله ای از آزمایشها را وقتی در $n + m$ آزمایش n موفقیت وجود داشته باشد محاسبه کردیم . آیا این چگالی شرطی تغییر خواهد کرد اگر مشخص کنیم نتیجهٔ کدام یک از n آزمایش موفقیت بوده است ؟

۱۴- تابع جرم احتمال شرطی X را به شرط $X + Y = n$ محاسبه کنید ، وقتی X و Y متغیرهای

تصادفی هندسی مستقل و هم توزیع هستند .

۱۵- اگر X و Y متغیرهای تصادفی دوجمله ای مستقل با پارامترهای مشترك n و p باشند ، نشان دهید توزیع شرطی X به شرط X + Y = m توزیع فوق هندسی است . همچنین با استدلالی دیگر مسأله را حل کنید به قسمی که نیازی به هیچ محاسبه نداشته باشد .

راهنمایی : تعداد 2n سکه را می اندازیم فرض کنید X تعداد شیرها در n پرتاب اول و Y تعداد شیرها در n پرتاب بعدی باشد . حال استدلال کنید که اگر m شیر مفروض باشد ، تعداد شیرها در n پرتاب اول دارای همان توزیع است که تعداد مهره های سفید انتخاب شده در انتخاب نمونه ای به حجم m از n مهره سفید و n مهره سیاه است .

۱۶- آزمایشی را در نظر بگیرید که دارای سه برآمد باشد به قسمی که برآمد i با احتمال p_i ، $i = 1, 2, 3$ رخ می دهد . فرض کنید این آزمایش مستقلاً n بار تکرار می شود و X_i ، $i = 1, 2, 3$ تعداد دفعاتی باشد که برآمد i رخ می دهد . مطلوب است تابع جرم احتمال شرطی X_1 با فرض $X_2 = m$.

۱۷- فرض کنید X_1 ، X_2 ، X_3 متغیرهای تصادفی مستقل پیوسته و همتوزیع باشند . مطلوب است محاسبه

(الف) $P\{X_1 > X_2 | X_1 > X_3\};$

(ب) $P\{X_1 > X_2 | X_1 < X_3\};$

(پ) $P\{X_1 > X_2 | X_2 > X_3\};$

(ت) $P\{X_1 > X_2 | X_2 < X_3\}.$

۱۸- فرض کنید U متغیری با توزیع یکنواخت بر (۱ ، ۰) باشد . مطلوب است توزیع شرطی U با فرض

(الف) $U > a;$

(ب) $U < a;$

که در آن $0 < a < 1$

۱۹- فرض کنید W ، مقدار رطوبت هوا در یک روز معین یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای

(t, β) باشد . یعنی چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(w) = \beta e^{-\beta w}(\beta w)^{t-1}/\Gamma(t), \quad w > 0.$$

همچنین فرض کنید اگر $W = w$ ، تعداد حوادث در طول روز (N) دارای توزیع پواسن با میانگین W است . ثابت کنید توزیع شرطی W با فرض $N = n$ یک توزیع گاما با پارامترهای $(t + n, \beta + 1)$ است .

۲۰- فرض کنید W یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای (t, β) ، و با شرطی کردن روی $W = w$ ، متغیرهای تصادفی X_1 ، . . . ، X_n مستقل و دارای توزیع نمایی با نرخ w هستند. ثابت کنید توزیع شرطی W با فرض $X_1 = x_1$ ، $X_2 = x_2$ ، ... ، $X_n = x_n$ گاما با پارامترهای $(t + n, \ \beta + \Sigma_{i=1}^{n} x_i)$ است .

۲۱- یک آرایه مستطیلی شامل mn عدد در n سطر و m ستون را دارای یک نقطه زینی گوییم اگر عددی وجود داشته باشد که برای می‌نیمم سطر و ماکزیمم ستون متناظرش باشد . مثلاً ، در آرایهٔ زیر

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \\ .5 & 12 & 3 \end{array}$$

عدد ۱ در سطر اول و ستون اول یک نقطه زینی است . وجود یک نقطه زینی در نظریه بازیها از اهمیت خاصی برخوردار است . حال یک آرایه مستطیلی از اعداد را در نظر بگیرید و فرض کنید که دو بازیکن A و B به صورت زیر بازی را شروع می کنند : A یکی از اعداد ۱ ، ۲ ، . . . ، n و B یکی از اعداد ۱ ، ۲ ، . . . ، m را انتخاب می کند . این انتخابها با هم اعلام می شوند و اگر A عدد i و B عدد j را انتخاب کرده باشد بازیکن A مبلغی برابر عدد واقع در سطر i ام و ستون j ام را از B می برد . حال فرض کنید این آرایه دارای یک نقطه زینی باشد ـ مثلاً عدد واقع در سطر r ام و ستون k ام ـ این عدد را x_{rk} می‌نامیم . حال اگر بازیکن A سطر r را انتخاب کند مطمئن خواهد بود که کمتر از x_{rk} برنده نخواهد شد (زیرا x_{rk} عدد می نیمم سطر r ام است) . از طرف دیگر اگر بازیکن B ستون k ام را انتخاب کند می تواند مطمئن باشد که بیشتر از x_{rk} نخواهد باخت (زیرا x_{rk} عدد ماکزیمم ستون k است) . بنابراین منطقی به نظر می رسد که این دو استراتژی را بهینه بنامیم و نشان دهیم که مقدار بازی برای بازیکن A برابر x_{rk} خواهد بود .

اگر nm عدد آرایهٔ مستطیلی فوق از یک توزیع پیوسته دلخواه مستقلاً انتخاب شده باشد ، احتمال این که آرایه انتخاب شده دارای یک نقطهٔ زینی باشد چقدر است ؟

۲۲- متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع نرمال دو متغیره است اگر تابع چگالی توأم آنها به صورت زیر باشد

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right\}$$

(الف) نشان دهید که چگالی شرطی X با فرض Y = y نرمال با پارامترهای زیر است

$$\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y) \qquad و \qquad \sigma_x^2(1-\rho^2)$$

(ب) نشان دهید که X و Y هردودارای توزیع نرمال باپارامترهای μ_x و σ^2_x و μ_y و σ^2_y است .

(پ) نشان دهید اگر $\rho = 0$ ، متغیرهای X و Y مستقل می شوند .

۲۳- فرض کنید که F (x) تابع توزیع تجمعی باشد . ثابت کنید (الف) تابع $F^n(x)$ و (ب) تابع $1 - [1 - F(x)]^n$ نیز تابع توزیع هستند ، که در آنها n عدد صحیح مثبت است .

راهنمایی : فرض کنید X_1 ، . . . ، X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع توأم F باشد . متغیرهای تصادفی Y و Z را برحسب X_i به قسمی تعریف می کنیم که

۲۴- ثابت کنید اگر n فرد بطور تصادفی روی جاده ای به طول L مایل قرار گیرند احتمال آن که هیچ دونفری به فاصله کمتراز D مایل قرار نگیرد برابر است با $[1-(n-1)D/L]^n$ در صورتی که $D \le L/(n-1)$. در حالت $D > L/(n-1)$ به چه صورت خواهد بود ؟

۲۵- معادله (۶-۲) را از مشتق گیری معادله (۶-۴) به دست آورید .

۲۶- ثابت کنید که میانه نمونه ای به حجم ۲n + ۱ از توزیع یکنواخت بر (۰ ، ۱) دارای توزیع بتا با پارامترهای (n + ۱ , n + ۱) است .

۲۷- معادله (۶-۶) که چگالی توأم $X_{(i)}$ و $X_{(j)}$ را می دهد ثابت کنید .

۲۸- چگالی دامنه تغییرات نمونه ای به حجم n از یک توزیع پیوسته با تابع چگالی f را پیدا کنید .

۲۹- فرض کنید $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \dots \le X_{(n)}$ مقادیر مرتب شدهٔ n متغیر تصادفی مستقل یکنواخت بر (۰ ، ۱) باشد . ثابت کنید به ازای $1 \le k \le n+1$

$$P\{X_{(k)} - X_{(k-1)} > t\} = (1-t)^n$$

که در آن $X_{(0)} = 0$ ، $X_{(n+1)} \equiv 1$

۳۰- فرض کنید X_1 ، . . . ، X_n مجموعه ای از متغیرهای تصادفی پیوسته همتوزیع مستقل با تابع توزیع F باشند . فرض کنید X مستقل از $X_{(i)}$ ، $i = 1, \dots, n$ نیز دارای توزیع F باشد . مطلوب است محاسبه

(الف) $P\{X > X_{(n)}\}$

(ب) $P\{X > X_{(1)}\}$

(پ) $P\{X_{(i)} < X < X_{(j)}\},\ 1 \le i < j \le n.$

۳۱- فرض کنید X_1 ، . . . ، X_n متغیرهای تصادفی همتوزیع مستقل با تابع توزیع F و چگالی f باشند . کمیت $M = [X_{(1)} + X_{(n)}]/2$ را میان دامنه گویند . ثابت کنید که تابع توزیع آن به صورت زیر است

$$F_M(m) = n \int_{-\infty}^{m} [F(2m - x) - F(x)]^{n-1} f(x)\, dx$$

۳۲- فرض کنید X_1 ، . . . ، X_n متغیرهای تصادفی مستقل یکنواخت بر (۰ ، ۱) باشند . اگر $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ دامنه و $M = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}$ میان دامنه باشد تابع چگالی توأم R و M را محاسبه کنید .

مسائل

۱- دو تاس را می اندازیم . تابع جرم احتمال X و Y را در حالات زیر به دست آورید .

(الف) X مقدار بزرگتر حاصل و Y مجموع مقادیر به دست آمده است ،

(ب) X عدد روی تاس اول و Y عدد بزرگتر حاصل است ،

(پ) X کوچکترین عدد حاصل و Y بزرگترین مقدار حاصل است .

۲- جعبه ای دارای ۵ ترانزیستور است که دو تای آنها خراب است . ترانزیستورها متوالیاً امتحان می شوند تا خرابها مشخص شوند . اگر N_1 تعداد آزمایشهای لازم برای تشخیص اولین ترانزیستور خراب و N_2 تعداد آزمایشهای اضافی برای تشخیص دومین ترانزیستور خراب باشد . تابع جرم احتمال توأم N_1 و N_2 را حساب کنید .

۳- دنباله ای از آزمایشهای برنولی را در نظر بگیرید که هر یک با احتمال p رخ می دهد . فرض کنید X_1 تعداد شکستها قبل از اولین موفقیت و X_2 تعداد شکستهای بعدی تا دومین موفقیت باشد . تابع جرم احتمال X_1 و X_2 را پیدا کنید .

۴- تابع چگالی احتمال X و Y به صورت زیر داده می شود

$$f(x, y) = c(y^2 - x^2)e^{-y} \qquad -y \le x \le y, 0 < y < \infty$$

(الف) مقدار c را محاسبه کنید .

(ب) چگالیهای X و Y را پیدا کنید .

۵- تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر داده شده است

$$f(x, y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) \qquad 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

(الف) ثابت کنید این یک تابع چگالی توأم است .

(ب) تابع چگالی X را محاسبه کنید .

(پ) مقدار $P\{X > Y\}$ را به دست آورید .

(ت) $P(Y > \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2})$ را پیدا کنید .

۶- تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر داده شده است

$$f(x, y) = e^{-(x+y)} \qquad 0 \le x < \infty, 0 \le y < \infty$$

مطلوب است (الف) $P(X < Y)$ و (ب) $P(X < a)$.

۷- صاحب مغازه ای می داند ۴۵ درصد مشتریهای او یک تلویزیون معمولی ۱۵ درصد تلویزیون رنگی می خرند و ۴۰ درصد فقط تماشاگرند . اگر ۵ مشتری به مغازه وارد شوند احتمال این که دقیقاً ۲ تلویزیون معمولی و یک رنگی بفروشد چقدر است ؟

۸- تعداد افرادی که به یک داروخانه در ساعت معین وارد می شوند یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda = 10$ است . احتمال شرطی این که حداکثر سه مرد وارد داروخانه شوند چقدر است به شرط آن که ۱۰ زن در آن ساعت وارد داروخانه شده باشند ، چه فرضهایی را باید

درنظر گرفت .

۹- یک مرد و زن قرار می گذارند در ساعت ۳۰ : ۱۲ بعدازظهر در محل معینی یکدیگر را ملاقات کنند . اگر زمان رسیدن مرد دارای توزیع یکنواخت درفاصله ۱۵ : ۱۲ و ۴۵ : ۱۲ و زمان رسیدن زن مستقل از مرد دارای توزیع یکنواخت درفاصله ۱۲ تا ۱ بعدازظهر باشد ، احتمال این که نفر اول بیشتر از ۵ دقیقه منتظر نماند چقدر است ؟ احتمال این که مرد زودتر برسد چقدر است ؟

۱۰- یک آمبولانس دز جاده ای به طول L با سرعت ثابت در رفت و آمد است . در لحظه معینی یک حادثه رخ می دهد محل وقوع حادثه دارای توزیع یکنواخت در طول جاده است . [یعنی ، فاصله اش از یکی از دو انتها دارای توزیع یکنواخت بر $(0, L)$ است] . با فرض این که محل آمبولانس درلحظه حادثه نیز دارای توزیع یکنواخت باشد با توجه به استقلال ، توزیع فاصله آن را از حادثه محاسبه کنید . اگر حرکت آمبولانس با سرعت ثابت نباشد جواب مسأله چگونه خواهد بود ؟

۱۱- فرض کنید نقطه ای بطور یکنواخت روی مربعی به مساحت ۱ به رؤوس (۰ ، ۰) و (۱ ، ۰) و (۰ ، ۱) و (۱ و ۱) انتخاب می شود و X و Y مختصات این نقطه است .

(الف) توزیعهای حاشیه ای X و Y را پیدا کنید .

(ب) آیا X و Y مستقل هستند ؟

(پ) احتمال این که فاصله (X, Y) تا مرکز مربع بزرگتر از $\frac{1}{4}$ باشد چقدر است ؟

۱۲- سه نقطه X_1 ، X_2 و X_3 بتصادف روی خط L انتخاب می شوند . مطلوب است احتمال این که X_2 بین X_1 و X_3 قرار گیرد ؟

۱۳- دو نقطه بتصادف روی خطی به طول L به قسمی انتخاب می شوند که در طرفین نقطه میانی واقع شوند . [به عبارت دیگر دو نقطه X و Y متغیرهای تصادفی مستقل هستند به معنی که X بطور یکنواخت بر $(0, \frac{L}{2})$ و Y بطور یکنواخت روی $(\frac{L}{2}, L)$ توزیع شده است . مطلوب است احتمال این که فاصله بین دو نقطه ، بزرگتر از $\frac{L}{3}$ باشد .

۱۴- در مسأله ۱۳ احتمال این که ۳ پاره خط از 0 تا X و از X تا Y و از Y تا L بتواند یک مثلث بسازند چقدر است ؟ (توجه کنید که سه پاره خط وقتی می توانند یک مثلث بسازند که طول هریک از آنها کمتر از مجموع دو ضلع دیگر باشد) .

۱۵- چگالی توأم X و Y به صورت زیر داده شده است .

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

آیا X و Y مستقل هستند ؟ اگر f (x, y) به صورت زیر باشد آیا X و Y مستقل خواهند بود ؟

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱۶- فرض کنید 10^6 نفر به یک ایستگاه در زمانهایی که متغیرهای تصادفی مستقل اندمی رسند هر یک با توزیع یکنواخت روی (10^6 ، ۰) است . فرض کنید N تعداد افرادی باشد که در ساعت اول می رسند . مقدار تقریبی $P\{N = i\}$ را محاسبه کنید .

۱۷- فرض کنید A ، B و C متغیرهای تصادفی مستقل باتوزیع یکنواخت روی (۱ ، ۰) هستند .

(الف) تابع توزیع توأم A ، B و C را پیدا کنید .

(ب) احتمال این که تمام ریشه های معادله $Ax^2 + Bx + C = 0$ حقیقی باشند چقدر است ؟

۱۸- اگر X بر (۱ ، ۰) دارای توزیع یکنواخت و Y دارای توزیع نمایی با پارامتر ۱ = λ باشد مطلوب است توزیع (الف) $Z = X + Y$ و (ب) $Z = \frac{X}{Y}$ ، فرض کنیدمتغیرها مستقل هستند .

۱۹- اگر X_1و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل نمایی باپارامترهای λ_1 و λ_2 باشند، توزیع $Z = \frac{X_1}{X_2}$ را پیدا کنید . همچنین احتمال $P\{X_1 < X_2\}$ را محاسبه کنید .

۲۰- وقتی جریانی به شدت I (برحسب آمپر) از مقاومت R (برحسب اهم) عبور می کند توان حاصل برابر $W = I^2R$ است (که برحسب وات محاسبه می شود) . فرض کنید I و R متغیرهای تصادفی مستقل با چگالی های زیر باشند

$$\begin{aligned} f_I(x) &= 6x(1 - x) && 0 \le x \le 1 \\ f_R(x) &= 2x && 0 \le x \le 1 \end{aligned}$$

تابع چگالی W را معین کنید .

۲۱- عدد X را از بین اعداد {۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱} بتصادف انتخاب می کنیم . حال عددی را بتصادف از بین زیرمجموعه {1, ..., X} اختیار می کنیم . عدد دوم را Y می نامیم .

(الف) تابع جرم توأم X و Y را پیدا کنید .

(ب) تابع جرم احتمال شرطی X را با فرض $Y = i$ پیدا کنید . و آن را برای $i = 1, 2, 3, 4, 5$ محاسبه کنید .

(پ) آیا X و Y مستقل هستند چرا ؟

۲۲- دو تاس ریخته می شوند . فرض کنید X و Y به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقدار حاصل باشد . تابع جرم شرطی Y را با فرض $X = i$ ، $i = 1, 2, ..., 6$ محاسبه کنید . آیا X و Y مستقل هستند ؟ چرا ؟

۲۳- تابع جرم احتمال توأم X و Y به صورت زیر داده می شود

$$p(1,1) = \tfrac{1}{8} \qquad p(1,2) = \tfrac{1}{4}$$
$$p(2,1) = \tfrac{1}{8} \qquad p(2,2) = \tfrac{1}{2}$$

(الف) تابع جرم شرطی X را با فرض $Y = i$ ، $i = 1, 2$ محاسبه کنید .

(ب) آیا X و Y مستقل هستند ؟

(پ) مقادیر $P(XY \leq ۳)$ ، $P(X + Y > ۲)$ ، $P(\frac{X}{Y} > ۱)$ را محاسبه کنید .

۲۴- تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر داده شده است .

$$f(x, y) = xe^{-x(y+1)} \qquad x > 0, y > 0$$

(الف) چگالی شرطی X را با فرض $Y = y$ پیدا کنید ، همچنین تابع چگالی شرطی Y را با فرض $X = x$ پیدا کنید .

(ب) تابع چگالی $Z = XY$ را پیدا کنید .

۲۵- چگالی توأم X و Y به صورت زیر است

$$f(x, y) = c(x^2 - y^2)e^{-x} \qquad 0 \leq x < \infty, -x \leq y \leq x$$

توزیع شرطی Y را با فرض $X = x$ پیدا کنید .

۲۶- اگر X_1 ، X_2 و X_3 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت بر (a, b) باشند . مطلوب است محاسبه احتمال این که بزرگترین مشاهده بزرگتر از مجموع دو مشاهده دیگر باشد .

۲۷- یک ماشین مرکب می تواند بطور کامل عمل کند اگر حداقل ۳ موتور از ۵ موتور آن درست کار کنند . اگر موتورها بطور مستقل با تابع چگالی $x > 0$ ، $f(x) = xe^{-x}$ ، کار کنند ، مطلوب است تابع چگالی طول زمان کارکرد ماشین .

۲۸- اگر ۳ ماشین در سه نقطه تصادفی بر جاده‌ای به طول L خراب شده باشد . احتمال این که هیچ دو ماشینی در فاصله‌ای برابر d از یکدیگر قرار نگیرند چقدر است در صورتی که $d \leq \frac{L}{2}$.

۲۹- نمونه ای به حجم ۵ از یک توزیع یکنواخت بر (۱ ، ۰) اختیار کنید . احتمال این که میانه در فاصله ($\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱}{۴}$) باشد چقدر است ؟

۳۰- اگر X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 متغیرهای همتوزیع نمایی با پارامتر λ باشد مطلوب است محاسبه

(الف) $P\{\min (X_1, \ldots, X_5) \leq a\}$

(ب) $P\{\max (X_1, \ldots, X_5) \leq a\}.$

۳۱- توزیع دامنهٔ نمونه ای به حجم ۴ از توزیعی با تابع چگالی زیر را پیدا کنید

$$f(x) = 2x, \ 0 < x < 1.$$

۳۲- فرض کنید X و Y مختصات نقطه ای با توزیع یکنواخت بر دایره ای به شعاع ۱ و مرکز مبداء باشد . یعنی چگالی توأم آنها به صورت زیر است

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \qquad x^2 + y^2 \leq 1$$

تابع چگالی توأم مختصات قطبی $R = (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}$ و $\Theta = \tan^{-1} \frac{Y}{X}$ را پیدا کنید .

۳۳- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت بر (۱ ، ۰) باشند مطلوب است تابع چگالی توأم $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ و $\Theta = \tan^{-1} \frac{Y}{X}$.

۳۴- اگر U در فاصله $(0, 2\pi)$ دارای توزیع یکنواخت و Z مستقل از U دارای توزیع نمایی با نرخ ۱ باشد ، مستقیماً ثابت کنید (بدون استفاده از مثال ۷ ب) که X و Y به صورت زیر

$$X = \sqrt{2Z} \cos U$$
$$Y = \sqrt{2Z} \sin U$$

متغیرهای مستقل نرمال استاندارد هستند .

۳۵- اگر X و Y دارای تابع چگالی توأم زیر باشند

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2} \qquad x \geq 1, y \geq 1$$

(الف) تابع چگالی توأم $U = XY$ و $V = \frac{X}{Y}$ را محاسبه کنید .

(ب) چگالی های حاشیه ای را به دست آورید .

۳۶- اگر X و Y متغیرهای تصادفی با توزیع یکنواخت روی (۱ ، ۰) باشد مطلوب است

چگالی توأم

(الف) $U = X + Y, V = X/Y;$

(ب) $U = X, V = X/Y;$

(پ) $U = X + Y, V = X/(X + Y).$

۳۷- مسأله ۳۶ را وقتی X و Y متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ هستند حل کنید .

۳۸- اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامتر λ باشد مطلوب است تابع چگالی توأم $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = e^{X_1}$.

۳۹- اگر X ، Y و Z متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی $f(x) = e^{-x}$ ، $0 < x < \infty$ باشد مطلوب است چگالی توأم $U = X + Y$ ، $V = X + Z$ و $W = Y + Z$.

۴۰- در مثال ۷ت ثابت کنید Y_2 و Y_3 دارای توزیع نرمال دومتغیره هستند .

۴۱- سن والدین در یک بیمارستان تقریباً دارای توزیع نرمال دومتغیره باپارامترهای $\mu_x = ۲۸/۴$ ، $\sigma_x = ۶/۸$ ، $\mu_y = ۳۱/۶$ ، $\sigma_y = ۷/۴$ و $\rho = ۰/۸۲$ است (پارامترهای با اندیس n مربوط به سن زن حامله و با اندیس y مربوط به سن پدر است) با استفاده از نتایج تمرین نظری ۲۲ مطلوب است محاسبه ،

(الف) نسبت زنان حامله ای که سن آنها بیشتر از ۳۰ سال است .

(ب) نسبت پدران با سن بیش از ۳۵ که زنانی مسن تر از ۳۰ سال دارند .

فصل هفتم

میانگین

۱ - مقدمه و تعاریف

یکی از مفاهیم بسیار مهم در نظریهٔ احتمال ، میانگین یک متغیر تصادفی است . **میانگین** یا **امید ریاضی** X را اگر X متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال p(x) باشد با E [X] نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$E[X] = \sum_{x: p(x) > 0} xp(x)$$

به عبارتی امید ریاضی X متوسط موزون مقادیر ممکنی است که X می تواند اختیار کند ، وزن هر مقدار برابر احتمال X در آن نقطه است . مثلاً اگر تابع جرم احتمال X به صورت زیر باشد .

$$p(0) = \tfrac{1}{2} = p(1)$$

در این صورت

$$E[X] = 0(\tfrac{1}{2}) + 1(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$$

که همان میانگین معمولی دو مقدار ممکن 1, 0 است که X می تواند بگیرد . از طرف دیگر ، اگر

$$p(0) = \tfrac{1}{3} \qquad p(1) = \tfrac{2}{3}$$

در این صورت

$$E[X] = 0(\tfrac{1}{3}) + 1(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3}$$

میانگین موزون دو مقدار ممکن 0 , 1 می باشد که در آن وزن داده شده به ۱ دو برابر مقدار وزنی است که به 0 نسبت داده شده است، زیرا $p(1) = 2p(0)$.

تعبیر فراوانی احتمالات انگیزهٔ دیگری برای تعریف میانگین می باشد. در این تعبیر (که تا اندازه ای از قانون قوی اعداد بزرگ که در فصل بعد ارائه می شود پیروی می کند) فرض می کنیم که اگر یک آزمایش تصادفی به صورت دنباله ای بی نهایت از تکرارهای مستقل انجام شود، آن گاه برای هر پیشامد E نسبت دفعاتی که E رخ می دهد برابر P (E) خواهد بود. اکنون متغیر تصادفی X را که باید یکی از مقادیر x_1 ، x_2 ، ... ، x_n را به ترتیب با احتمالات $P(x_1)$ ، $p(x_2)$ ، . . . ، $p(x_n)$ اختیار کند درنظر می گیریم و فرض می کنیم X نمایش برنده شدن در یک بازی ساده شانسی باشد. یعنی با احتمال $p(x_i)$ مبلغ x_i واحد ، $i = 1,2,\ldots,n$ ، می بریم . اینک با تعبیر فراوانی نتیجه می شود که اگر این بازی ساده را متوالیاً انجام دهیم در این صورت نسبت دفعاتی که x_i واحدبرنده می شویم برابر $p(x_i)$ می باشد. چون این مطلب برای تمام i ها، $i = 1,2,\ldots,n$ درست است نتیجه می شود که متوسط برد ما در هر بازی برابر است با

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = E[X]$$

مثال ۱ الف. E [X] را وقتی X برآمد پرتاب یک تاس سالم است بیابید.

حل : چون $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$. داریم

$$E[X] = 1(\tfrac{1}{6}) + 2(\tfrac{1}{6}) + 3(\tfrac{1}{6}) + 4(\tfrac{1}{6}) + 5(\tfrac{1}{6}) + 6(\tfrac{1}{6}) = \tfrac{7}{2}$$

مثال ۱ ب. میانگین یک متغیر تصادفی برنولی . X یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر p است، E [X] را حساب کنید.

حل : چون $p(0) = 1 - p$ ، $p(1) = p$ ، داریم

$$E[X] = 0(1-p) + 1(p) = p$$

به عبارت دیگر، مثال ۱ ب ، بیان می کند که میانگین تعداد موفقیتها در یک آزمایش ساده درست برابر احتمال آن است که نتیجهٔ آزمایش یک موفقیت باشد. لذا، وقتی n آزمایش مستقل هریک با احتمال موفقیت p انجام دهیم طبیعی به نظر می رسد که میانگین تعداد موفقیتها برابر np باشد. اینک این پیش بینی را در مثال ۱ پ ثابت می کنیم .

مثال ۱ پ. میانگین متغیر تصادفی دو جمله ای : وقتی X یک متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای n و p است E [X] را پیدا کنید .

حل :

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=0}^{n} ip(i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{in!}{(n-i)!\,i!} p^i(1-p)^{n-i} \\
&= np \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-i)!\,(i-1)!} p^{i-1}(1-p)^{n-i} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k(1-p)^{n-1-k} \\
&= np[p+(1-p)]^{n-1} \\
&= np
\end{aligned}$$

که در آن تساوی دوم از آخر با فرض $k = i - 1$ نتیجه می گردد .

وقتی n بزرگ و $\lambda = np$ مناسب باشد متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ تقریب مناسبی برای متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای n و p می باشد. لذا، طبیعی به نظر می رسد که با توجه به نتیجه مثال ۱ پ فرض کنیم که میانگین متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ برابر λ است . اکنون این مطلب را ثابت می کنیم .

مثال ۱ ت . میانگین متغیر تصادفی پواسن. X یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ است . E [X] را محاسبه کنید .

حل :

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} ip(i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} ie^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} ie^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{(i-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

که در آن از تساوی زیر استفاده شده است .

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$$

مثال ۱ ث . میانگین متغیر تصادفی هندسی . میانگین یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر p را حساب کنید .

حل : برای متغیر تصادفی هندسی داریم

$$P\{X = n\} = p(1-p)^{n-1} \qquad n \geq 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} \\ &= p\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} \end{aligned}$$

که در آن $q = 1 - p$ می باشد . بنابراین

$$E[X] = p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^n)$$
$$= p\frac{d}{dq}\left(\sum_{n=1}^{\infty} q^n\right)$$
$$= p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right)$$
$$= \frac{p}{(1-q)^2}$$
$$= \frac{1}{p}$$

به عبارت دیگر، اگر آزمایشی با احتمال موفقیت p را تا رخ دادن اولین موفقیت تکرار کنیم، در این صورت میانگین تعداد آزمایشهای لازم برابر $\frac{1}{p}$ است.

مثال ۱ ج. به یک شرکت کننده در یک نمایش تفریحی دو سؤال ارائه می شود. سؤال ۱ و ۲، که وی با ترتیب انتخاب اقدام به پاسخ دادن می کند. اگر مایل باشد که ابتدا سئوال i ام $i = 1, 2$ ، را پاسخ دهد در این صورت تنها در صورتی که پاسخ iام درست باشد به او اجازه داده می شود که سؤال j ام، $j \neq i$ ، را بکند. اگر پاسخ اولیه اش نادرست باشد به وی اجازه داده نمی شود که سؤال دیگر را پاسخ دهد. اگر شرکت کننده سؤال i ام، $i = 1, 2$ را درست پاسخ دهد V_i تومان و اگر هر دو سؤال را درست پاسخ دهد $V_1 + V_2$ تومان دریافت می کند. اگر احتمال این که پاسخ سؤال i ام را بداند برابر p_i باشد، $i = 1,2$ و اگر E_i پیشامد این باشد که پاسخ سؤال iام را می داند به فرض این که E_i ها، $i = 1,2$ ، مستقل باشند برای این که میانگین برد خود را ماکزیمم کند باید با کدام سؤال شروع کند.

حل: اگر نخست با سؤال یک شروع کند در این صورت

با احتمال	$1 - P_1$	(تومان)	0
با احتمال	$P_1(1 - P_2)$	(تومان)	V_1
با احتمال	$P_1 P_2$	(تومان)	$V_1 + V_2$

خواهد برد. بنابراین میانگین برد او در این حالت برابر است با

$$V_1 P_1(1 - P_2) + (V_1 + V_2)P_1 P_2$$

از طرف دیگر، اگر ابتدا با سؤال ۲ شروع کند میانگین بردش برابر است با

$$V_2P_2(1-P_1)+(V_1+V_2)P_1P_2$$

بنابراین، بهتر است که نخست با سؤال ۱ شروع کند اگر

$$V_1P_1(1-P_2) \geq V_2P_2(1-P_1)$$

یا بطور معادل اگر

$$\frac{V_1P_1}{1-P_1} \geq \frac{V_2P_2}{1-P_2}$$

مثلاً اگر ۶۰ درصد مطمئن باشد که سؤال ۱ با ارزش ۲۰۰ تومان را درست پاسخ می دهد و ۸۰ درصد مطمئن باشد که سؤال ۲ با ارزش ۱۰۰ تومان را درست پاسخ می دهد، دراین صورت نخست با سؤال ۲ شروع می کند، زیرا

$$400 = \frac{(100)(.8)}{(.2)} > \frac{(200)(.6)}{(.4)} = 300$$

گرچه تا کنون تنها میانگین را برای متغیرهای تصادفی گسسته تعریف کردیم، می توان امید ریاضی یک متغیر تصادفی پیوسته را نیز تعریف نمود. اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، در این صورت چون

$$f(x)\,dx \approx P\{x \leq X \leq x+dx\}$$

مناسب است امید ریاضی X را به صورت زیر تعریف کنیم

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

مثال ۱ ع. میانگین متغیر تصادفی یکنواخت. میانگین یک متغیر تصادفی را که دارای توزیع یکنواخت روی (a, b) می باشد حساب کنید.

حل : چگالی یک متغیر تصادفی یکنواخت روی (a, b) عبارت است از

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین

$$E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx$$
$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)$$
$$= \frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)2}$$
$$= \frac{b+a}{2}$$

یعنی، میانگین یک متغیر تصادفی که بطور یکنواخت روی فاصله‌ای توزیع شده باشد برابر نقطه میانی فاصله است.

مثال ۱ ع. میانگین متغیر تصادفی نمایی. میانگین یک متغیر تصادفی دارای توزیع نمایی با پارامتر λ را به دست آورید.

حل: چون تابع چگالی به صورت زیر است

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

داریم

$$E[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

با انتگرال گیری جزء به جزء $\left(u = x,\ \lambda e^{-\lambda x}dx = dv\right)$ حاصل می شود

$$E[X] = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx$$
$$= 0 - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty$$
$$= \frac{1}{\lambda}$$

مثال ۱ غ. میانگین متغیر تصادفی نرمال. X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 می باشد. $E[X]$ را حساب کنید.

حل:

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx$$

x را به صورت $\mu + (x - \mu)$ می نویسم، داریم

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx + \mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx$$

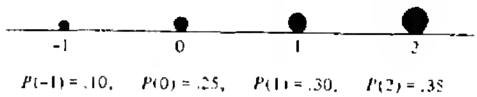
با قرار دادن $y = x - \mu$ در انتگرال اول داریم

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y^2/2\sigma^2}\,dy + \mu\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

که در آن $f(x)$ تابع چگالی نرمال است. بنا بر خاصیت تقارن انتگرال اول برابر صفر می شود و بنابراین

$$E[X] = \mu\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \mu$$

تبصره : مفهوم میانگین شبیه مفهوم **مرکز ثقل** توزیع یک جرم در فیزیک می باشد. یک متغیر تصادفی گسسته X را با تابع جرم احتمال $p(x_i)$, $i \geq 1$ در نظر می گیریم. اکنون اگر تصور کنیم که اوزانی با جرم $p(x_i)$, $i \geq 1$، در نقاط x_i، $i \geq 1$، روی یک میله بدون وزن قرار داده شده اند، (شکل ۷-۱ را ببینید) در این صورت نقطه ای را که در آن میله در حال تعادل خواهد بود مرکز ثقل می نامیم. اکنون برای آن دسته از خوانندگان که با استاتیک مقدماتی آشنایی دارند بسادگی می توان نشان داد که این نقطه در $E[X]$ [1] است.



شکل ۷-۱

تبصره : میانگین یک متغیر تصادفی را در حالت گسسته بر حسب یک مجموع و در حالت

۱- برای اثبات آن باید نشان دهیم که مجموع نیروهای پیچشی که مایلند نقطه را حول $E(X)$ بچرخانند برابر صفر است یعنی باید نشان دهیم $0 = \sum_i (x_i - E[X])p(x_i)$ و این فوراً نتیجه می شود.

پیوسته به صورت یک انتگرال تعریف کردیم. بنابراین میانگین فقط وقتی تعریف شده است که مجموع یا انتگرال نظیرش تعریف شده باشد. اینک با توجه به نظریهٔ انتگرال عمومی نخست $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ را برای تابع نامنفی g و سپس برای تابع دلخواه g به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \int_{x:g(x)\geq 0} g(x)\,dx - \int_{x:g(x)<0} [-g(x)]\,dx$$

یعنی، $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ را برابر با تفاضل $\int_{-\infty}^{+\infty} g^+(x)\,dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} g^-(x)\,dx$ تعریف می کنیم، که در آن g^+ و g^- توابع نا منفی اند و به صورت زیر تعریف می شوند.

$$g^+(x) = \begin{cases} g(x) & g(x) \geq 0 \\ 0 & g(x) < 0 \end{cases} \qquad g^-(x) = \begin{cases} 0 & g(x) \geq 0 \\ -g(x) & g(x) < 0 \end{cases}$$

[توجه کنید که $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$]. بنابراین به شرط آن که $\int_{-\infty}^{+\infty} g^+(x)\,dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty} g^-(x)dx$ هردو $+\infty$ نباشند $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ تعریف می شود. اگر یکی از انتگرالها $+\infty$ باشد و دیگری مقدار معینی داشته باشد در این صورت $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ می شود بر حسب این که کدام یک از انتگرالها مساوی $+\infty$ باشد.

بنابراین، در حالت پیوسته

$$E[X] = \int_{x>0} xf(x)\,dx - \int_{x<0} (-x)f(x)\,dx$$

و بنابراین $E[X]$ به شرط آن که هردو انتگرال $+\infty$ نباشند تعریف می گردد. متغیر تصادفی کوشی تنها مثالی در این کتاب است که میانگین ندارد. تابع چگالی کوشی با ساده ترین شکل آن به صورت زیر می باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad -\infty < x < \infty$$

می توان نشان داد که

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{(-x)}{1+x^2}\,dx = \infty \tag{۱-۱}$$

و لذا E [X] برای متغیر تصادفی کوشی تعریف نشده است.

بطور مشابه، در حالت گسسته

$$E[X] = \sum_{x \geq 0} xp(x) - \sum_{x < 0} (-x)p(x)$$

و E [X] به شرط آن که هردو مجموع ∞ + نباشند تعریف می گردد.

۲ - میانگین تابعی از یك متغیر تصادفی

فرض کنید متغیر تصادفی X و توزیع احتمال آن را داریم و به جای امید ریاضی X هدف ما محاسبه امید ریاضی تابعی از X مثلاً g (X) است. ([مثلاً ، ممکن است E [X^2] یا E [e^X] مورد نظر باشد]). چگونه می توانیم این کار را انجام دهیم؟ یک روش به صورت زیر است: چون g (X) یک متغیر تصادفی است پس باید دارای تابع توزیع احتمال باشد که با استفاده از شناخت توزیع X قابل محاسبه است. پس از محاسبه توزیع g (X) می توانیم E [g (X)] را با استفاده از تعریف میانگین حساب کنیم.

مثال ۲ الف. فرض کنید X نمایش تعداد شیرهای حاصل از دو پرتاب مستقل از یک سکه سالم باشد. E [X^2] را بیابید.

حل: تابع جرم احتمال X به صورت زیر است

$$P\{X = 0\} = \tfrac{1}{4} \qquad P\{X = 1\} = \tfrac{1}{2} \qquad P\{X = 2\} = \tfrac{1}{4}$$

بنابراین با قرار دادن $Y = X^2$ ، جرم احتمال Y به صورت زیر نتیجه می شود.

$$\begin{aligned} P\{Y = 0\} &= P\{X = 0\} = \tfrac{1}{4} \\ P\{Y = 1\} &= P\{X = 1\} = \tfrac{1}{2} \\ P\{Y = 4\} &= P\{X = 2\} = \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

بنابراین

$$E[X^2] = E[Y] = 0(\tfrac{1}{4}) + 1(\tfrac{1}{2}) + 4(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{3}{2}$$

توجه کنید که

$$\tfrac{3}{2} = E(X^2) \neq (E[X])^2 = 1$$

مثال ۲ ب. اگر X دارای توزیع یکنواخت روی (1 , 0) باشد. $E[e^X]$ را حساب کنید.

حل: فرض کنید $Y = e^X$ ، تابع توزیع Y را به صورت زیر حساب می کنیم: برای $1 \le a \le e$

$$\begin{aligned} F_Y(a) &= P\{Y \le a\} \\ &= P\{e^X \le a\} \\ &= P\{X \le \log a\} \\ &= \log a \end{aligned}$$

تساوی آخر با توجه به این که X دارای توزیع یکنواخت روی (1 , 0) است به دست می آید. چگالی Y را می توان با مشتق گیری از $F_Y(a)$ به دست آورید.

$$f_Y(a) = \frac{1}{a} \qquad 1 \le a \le e$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E[e^X] = E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} a f_Y(a)\, da \\ &= \int_1^e da \\ &= e - 1 \end{aligned}$$

گرچه از نظر تئوری همواره می توان روش فوق را برای محاسبهٔ میانگین هر تابعی از X با معلوم بودن توزیع X به کار برد، اما خوشبختانه روش ساده تری برای این کار وجود دارد حکم زیر که گاهی آن را « قانون نا آگاهی » می نامند چگونگی محاسبهٔ میانگین $g(X)$ را بدون محاسبه توزیع آن نشان می دهد.

حکم ۲-۱ قانون نا آگاهی

(الف) اگر X متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال $p(x)$ باشد، در این صورت برای هر تابع حقیقی g

$$E[g(X)] = \sum_{x:p(x)>0} g(x)p(x)$$

(ب) اگر X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f (x) باشد در این صورت برای هر تابع حقیقی g

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$$

قبل از اقدام به اثبات این حکم نخست بررسی می کنیم که حکم فوق با مثالهای ۲ الف و ۲ ب مطابقت دارد. حکم را برای مثال ۲ الف به کار می بریم، داریم

$$E[X^2] = 0^2(\tfrac{1}{4}) + 1^2(\tfrac{1}{2}) + 2^2(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{3}{2}$$

در حالی که با به کاربردن آن برای مثال ۲ ب نتیجه می شود

$$E[e^X] = \int_0^1 e^x\,dx \qquad f(x) = 1, 0 < x < 1$$
$$= e - 1$$

بنابراین نتایج قبلی را تائید می کند.

اثبات حکم ۲-۱ در حالت گسسته تا حدی ساده تر است و آن را به عنوان تمرین برای خواننده می گذاریم. برای اثبات آن درحال پیوسته به لم زیرکه به نوبهٔ خودجالب است نیازداریم.

لم ۱

برای هر متغیر تصادفی Y

$$E[Y] = \int_0^\infty P\{Y > y\}\,dy - \int_0^\infty P\{Y < -y\}\,dy$$

برهان: اثبات را برای یک متغیر تصادفی پیوسته Y با تابع چگالی احتمال f_Y ارائه می دهیم. با توجه با تساوی $P\{Y > y\} = \int_y^\infty f_Y(x)\,dx$ داریم

$$\int_0^\infty P\{Y > y\}\,dy = \int_0^\infty \int_y^\infty f_Y(x)\,dx\,dy \qquad (۱-۲)$$

با تعویض ترتیب انتگرال گیری در معادلهٔ (۲ - ۱) داریم

$$\int_0^\infty P\{Y > y\}\, dy = \int_0^\infty \left(\int_0^x dy\right) f_Y(x)\, dx$$
$$= \int_0^\infty x f_Y(x)\, dx \qquad (۲-۲)$$

بطور مشابه

$$\int_0^\infty P\{Y < -y\}\, dy = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{-y} f_Y(x)\, dx\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{-x} dy\right) f_Y(x)\, dx \qquad (۳-۲)$$
$$= -\int_{-\infty}^0 x f_Y(x)\, dx$$

اینک از معادلات (۲-۲) و (۳-۲) نتیجه می شود

$$\int_0^\infty P\{Y > y\}\, dy - \int_0^\infty P\{Y < -y\}\, dy = \int_0^\infty x f_Y(x)\, dx + \int_{-\infty}^0 x f_Y(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^\infty x f_Y(x)\, dx$$
$$= E[Y]$$

در اکثر اوقات این لم که در حد خود قابل توجه است، در متون درسی برای متغیر تصادفی نامنفی Y بیان می شود.

$$E[Y] = \int_0^\infty P\{Y > y\}\, dy \quad \text{هرگاه} \quad P\{Y \ge 0\} = 1$$

اکنون زمان آن است که حکم ۲-۱ (ب) را ثابت کنیم.

برهان حکم ۲-۱ (ب): برای هر تابع g بنا بر لم ۲-۱ داریم

$$E[g(X)] = \int_0^\infty P\{g(X) > y\}\, dy - \int_0^\infty P\{g(X) < -y\}\, dy$$
$$= \int_0^\infty \int_{x:g(x)>y} f(x)\, dx\, dy - \int_0^\infty \int_{x:g(x)<-y} f(x)\, dx\, dy$$
$$= \int_{x:g(x)>0} \int_0^{g(x)} dy\, f(x)\, dx - \int_{x:g(x)<0} \int_0^{-g(x)} dy\, f(x)\, dx$$
$$= \int_{x:g(x)>0} g(x) f(x)\, dx + \int_{x:g(x)<0} g(x) f(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^\infty g(x) f(x)\, dx$$

و اثبات کامل می گردد.

مثال ۲ پ : کالایی که بطور فصلی فروخته می شود، سود خالص b تومان برای هر واحد فروخته شده و زیان خالص ℓ تومان برای هر واحد فروش نشده در پایان فصل خواهد داشت. تعداد اقلام کالا که فروشگاه خاصی در طول هر فصل سفارش می دهد، متغیر تصادفی با تابع جرم احتمال $i \geq 0, p(i)$ می باشد. اگر لازم باشد این فروشگاه کالا را از قبل ذخیره کند تعیین کنید فروشگاه چند واحد کالا باید ذخیره نماید تا میانگین سودش ماکزیمم شود.

حل : فرض کنید X نمایش تعداد کالای سفارش شده باشد. اگر s کالا ذخیره شده باشد در این صورت سود آن را که با P (s) نشان می دهیم به صورت زیر محاسبه می شود

$$\begin{aligned} P(s) &= bX - (s - X)\ell && X \leq s \\ &= sb && X > s \end{aligned}$$

بنابراین میانگین سود برابر است با

$$\begin{aligned} E[P(s)] &= \sum_{i=0}^{s} [bi - (s-i)\ell]p(i) + \sum_{i=s+1}^{\infty} sbp(i) \\ &= (b+\ell)\sum_{i=0}^{s} ip(i) - s\ell \sum_{i=0}^{s} p(i) + sb\left[1 - \sum_{i=0}^{s} p(i)\right] \\ &= (b+\ell)\sum_{i=0}^{s} ip(i) - (b+\ell)s\sum_{i=0}^{s} p(i) + sb \\ &= sb + (b+\ell)\sum_{i=0}^{s}(i-s)p(i) \end{aligned}$$

برای تعیین مقدار بهینهٔ s، مقدار s را به اندازهٔ ۱ واحد افزایش داده و تغییرات سود را بررسی می کنیم. با این تغییر دیده می شود که میانگین سود در این حالت به صورت زیر در می آید.

$$\begin{aligned} E[P(s+1)] &= b(s+1) + (b+\ell)\sum_{i=0}^{s+1}(i-s-1)p(i) \\ &= b(s+1) + (b+\ell)\sum_{i=0}^{s}(i-s-1)p(i) \end{aligned}$$

بنابراین

$$E[P(s+1)] - E[P(s)] = b - (b+\ell)\sum_{i=0}^{s} p(i)$$

از این رو ذخیرهٔ $s+1$ کالا بهتر از ذخیرهٔ s کالا خواهد بود در صورتی که داشته باشیم

$$\sum_{i=0}^{s} p(i) < \frac{b}{b+\ell} \tag{۲-۴}$$

چون سمت چپ نا معادلهٔ (۲-۴) با افزایش s اضافه می شود در حالی که سمت راست ثابت است، لذا نتیجه می شود که نا معادله برای تمام مقادیر $s \leq s^*$ برقرار می باشد وقتی s^* بزرگترین مقدار s است که نا معادله (۲-۴) درست باشد، زیرا

$$E[P(0)] < \cdots < E[P(s^*)] < E[P(s^*+1)] > E[P(s^*+2)] > \cdots$$

نتیجه می شود که ذخیره s^*+1 کالا میانگین سود ماکزیمم خواهد داشت.

حالت پیوسته مثال ۲ پ حل مشابهی دارد.

مثال ۲ ت. در مثال ۲ پ فرض کنید که حجم تقاضا یک متغیر تصادفی پیوسته با چگالی f می باشد. تعداد بهینه اقلامی را که باید ذخیره نمود تا میانگین سود ماکزیمم شود تعیین کنید.

حل: مانند قبل اگر s کالا ذخیره شود و تقاضا X باشد در این صورت سود، $P(s)$، به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} P(s) &= bX - (s-X)\ell \qquad && X \leq s \\ &= sb && X > s \end{aligned}$$

بنابر این

$$\begin{aligned} E[P(s)] &= \int_0^s (bx-(s-x)\ell)f(x)\,dx + \int_s^\infty sbf(x)\,dx \\ &= (b+\ell)\int_0^s xf(x)\,dx - s\ell\int_0^s f(x)\,dx + sb\left[1-\int_0^s f(x)\,dx\right] \\ &= sb + (b+\ell)\int_0^s (x-s)f(x)\,dx \end{aligned} \tag{۲-۵}$$

اکنون می توان با حساب جامعه مقداری از s را که معادلهٔ (۲ - ۵) را ماکزیمم می کند به دست آورد. با مشتق گیری نتیجه می شود

$$\frac{d}{ds}E[P(s)] = b + (b+\ell)\frac{d}{ds}\left[\int_0^s xf(x)\,dx - s\int_0^s f(x)\,dx\right]$$
$$= b + (b+\ell)\left[sf(s) - sf(s) - \int_0^s f(x)\,dx\right]$$
$$= b - (b+\ell)\int_0^s f(x)\,dx$$

میانگین سود ماکزیمم با مساوی صفر قرار دادن عبارت فوق به دست می‌آید، اگر S در معادله زیر صدق کند

$$F(s) = \frac{b}{b+\ell}$$

در این معادله $F(s) = \int_0^s f(x)dx$ تابع توزیع تقاضاست.

نتیجهٔ حکم ۲-۱ به قرار زیر است.

نتیجهٔ ۲-۱

اگر a و b ثابت باشند در این صورت

$$E[aX+b] = aE[X] + b$$

برهان: در حالت گسسته، داریم

$$E[aX+b] = \sum_{x:p(x)>0}(ax+b)p(x)$$
$$= a\sum_{x:p(x)>0} xp(x) + b\sum_{x:p(x)>0} p(x)$$
$$= aE[X] + b$$

در حالت پیوسته، داریم

$$E[aX+b] = \int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)\,dx$$
$$= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$
$$= aE[X] + b$$

امید ریاضی متغیر تصادفی X را میانگین یا گشتاور مرتبه اول X نیز می‌نامیم، کمیت $E[X^n]$،

$n \geq 1$ ، را گشتاور مرتبه n ام X می نامیم . طبق حکم ۲ - ۱ داریم

$$E[X^n] = \begin{cases} \sum_{x:p(x)>0} x^n p(x) & \text{اگر } X \text{ گسسته باشد} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\, dx & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد} \end{cases}$$

۳ - میانگین مجموع متغیرهای تصادفی

حالت دو بعدی قانون ناآگاهی (حکم ۲-۱) بیان می کند که اگر X ، Y متغیرهای تصادفی و g یک تابع دومتغیره باشد، در این صورت اگر تابع جرم احتمال مشترك X و Y برابر $p(x, y)$ باشد، داریم

$$E[g(X, Y)] = \sum_y \sum_x g(x, y) p(x, y)$$

و اگر تابع جرم احتمال مشترك X و Y برابر $f(x,y)$ باشد، داریم

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y)\, dx\, dy$$

به عنوان کاربرد معادلات قبل فرض کنید که $E[X]$ و $E[Y]$ هردو متناهی باشند و فرض کنید که $g(X, Y) = X + Y$. در این صورت در حالت پیوسته داریم

$$\begin{aligned} E[X + Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f(x, y)\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y)\, dy\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y)\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy \\ &= E[X] + E[Y] \end{aligned}$$

این نتیجه در حالت کلی برقرار می باشد؛ از این رو وقتی $E[X]$ و $E[Y]$ متناهی اند

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

اکنون با یک استقراء ساده نتیجه می شود که اگر برای هر $i = 1,2,\ldots, n$ ، $E[X_i]$ متناهی باشد، در این صورت

$$E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n] \qquad (۱-۳)$$

معادله (۳-۱) یک فرمول بسیار مفید است که سودمندی آن را با چند مثال بیان می کنیم.

مثال ۳ الف. یک تاس سالم را ۱۰ بار مستقلاً پرتاب می کنیم، امید ریاضی مجموع را تعیین کنید.

حل: فرض کنید X نمایش مجموع حاصل باشد. اگر برای محاسبهٔ E[X] نخست توزیع X را تعیین کنیم در این صورت برای حل مسأله زمان نسبتاً زیادی لازم است. لیکن با توجه به این که

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$$

وقتی X_i برابر مقدار پرتاب i ام می باشد، بلافاصله دیده می شود که

$$E[X] = E[X_1] + \cdots + E[X_{10}] = 10(\tfrac{7}{2}) = 35$$

مثال ۳ ب. میانگین متغیر تصادفی دو جمله ای. به عنوان مثال دیگری از کارایی معادلهٔ (۳-۱)، با استفاده از آن میانگین متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای n و p را به دست می آوریم. یادآور می شویم که متغیر تصادفی X نمایش تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل است وقتی احتمال موفقیت در هر آزمایش p باشد، در این صورت

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

که در آن

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر آزمایش } i \text{ ام موفقیت باشد} \\ 0 & \text{اگر آزمایش } i \text{ ام شکست باشد} \end{cases}$$

بنابراین X_i یک متغیر تصادفی برنولی با میانگین $E[X_i] = 1(p) + 0(1-p)$ است، لذا

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n] = np$$

این نتیجه را با نتیجهٔ حاصل در مثال ۱ پ مقایسه نمایید.

مثال ۳ پ. میانگین تعداد جوربودنها. یک گروه N تایی از مردان کلاههای خود را در وسط اتاق می گذارند. کلاهها باهم مخلوط می شوند و هر مرد یکی از آنها را به تصادف انتخاب

می کند. میانگین تعداد مردانی را که کلاه خودشان را انتخاب می کنند بیابید.

حل: فرض کنید X نمایش تعداد جور بودن ها باشد، E [X] را بسادگی می توان حساب کرد وقتی

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

که در آن

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر مرد } i \text{ ام کلاه خود را انتخاب کند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

چون برای هر i ، مرد i ام با احتمال مساوی هریک از N کلاه را انتخاب می کند

$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{1}{N}$$

دیده می شود که

$$E[X] = E[X_1] + \cdots + E[X_N] = \left(\frac{1}{N}\right) N = 1$$

بنابر این بطور متوسط دقیقاً یکی از مردان کلاه خود را انتخاب می کند.

مثال ۳ ت. میانگین متغیر تصادفی دو جمله ای منفی. اگر آزمایشهای مستقل با احتمال ثابت موفقیت p انجام شوند، میانگین تعداد آزمایشهای لازم برای گردآوری r موفقیت را بیابید.

حل: اگر X نمایش تعداد آزمایشهای لازم برای به دست آوردن r موفقیت باشد، در این صورت X یک متغیر تصادفی دو جمله ای منفی است که تابع جرم آن عبارت است از

$$P\{X = n\} = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \qquad n = r, r+1, \ldots$$

بنابراین نتیجه می شود که

$$E[X] = \sum_{n=r}^{\infty} n \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \tag{۲-۳}$$

لیکن با توجه به مجموع زیر عبارت ساده تری برای E [X] به دست می آید.

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$$

وقتی X_1 تعداد آزمایشهای لازم برای کسب اولین موفقیت باشد، X_2 تعداد آزمایشهای اضافی تا زمان حصول موفقیت دوم باشد ، X_3 تعداد آزمایشهای اضافی باشد تا این که موفقیت سوم حاصل شود و الی آخر. یعنی X_i نمایش شماره آزمایشهای اضافی لازم پس از موفقیت $(i-1)$ ام است تا مجموعاً i موفقیت کسب نماییم. با بررسی کوتاهی روشن می شود که هریک از متغیرهای تصادفی X_i متغیر تصادفی هندسی با پارامتر p است، بنابراین از نتیجهٔ مثال ۱ ث داریم $E[X_i] = \frac{1}{p}$ ، $i = 1, 2, \ldots r$ ، و لذا

$$E[X] = E[X_1] + \cdots + E[X_r] = \frac{r}{p} \tag{۳-۳}$$

مثال ۳ ث . میانگین متغیر تصادفی فوق هندسی. از ظرفی که شامل N توپ سفید و M توپ سیاه است بطورتصادفی n توپ انتخاب می کنیم. میانگین تعداد توپهای سفید انتخاب شده را بیابید.

حل : فرض کنید X نمایش تعداد توپهای سفید انتخاب شده باشد . نتیجه می شود که

$$P\{X = k\} = \frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$$

از این رو

$$E[X] = \frac{\sum_{k=0}^{n} k\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$$

ولی می توان عبارت ساده تری برای $E[X]$ با توجه به مجموع زیر نوشت

$$X = X_1 + \cdots + X_N$$

که در آن

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر توپ سفید } i \text{ ام انتخاب شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون

$$\begin{aligned}E[X_i] &= P\{X_i = 1\}\\ &= P\,\{\text{توپ سفید } i \text{ ام انتخاب شود}\}\\ &= \frac{\binom{1}{1}\binom{M+N-1}{n-1}}{\binom{M+N}{n}}\\ &= \frac{n}{M+N}\end{aligned}$$

بنابراین

$$E[X] = E[X_1] + \cdots + E[X_N] = \frac{Nn}{M+N}$$

البته، می توان این نتیجه را با نمایش X به صورت زیر نیز به دست آورد

$$X = Y_1 + \cdots + Y_n$$

که در آن

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر توپ } i \text{ ام انتخاب شده سفید باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

چون توپ i ام انتخاب شده با شانس مساوی یک از M + N توپ است، داریم

$$E[Y_i] = \frac{N}{M+N}$$

و از این رو

$$E[X] = E[Y_1] + \cdots + E[Y_n] = \frac{nN}{M+N}$$

مثال ۳ ج.مسأله زیر در قرن هیجدهم توسط دانیل برنولی مطرح و حل شد. فرض کنید که جعبه ای شامل 2N کارت باشد. بطوری که دو تا از آنها با ۱، دوتا با ۲ و دوتا با ۳ و الی آخر نشان داده شده اند، بطور تصادفی m کارت بیرون می آوریم. میانگین تعداد زوجهایی که هنوز در ظرف باقی مانده است چقدر است؟ (جالب توجه این که، برنولی مسأله فوق را به عنوان مدل احتمالی ممکن برای تعیین تعداد زوجهای باقی مانده وقتی از N زوج متأهل m نفر فوت کنند در نظر گرفت).

حل : برای $i = 1,2,\ldots,N$ تعریف می کنیم

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر زوج } i \text{ ام در ظرف باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون ،

$$\begin{aligned} E[X_i] &= P\{X_i = 1\} \\ &= \frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}} \\ &= \frac{\dfrac{(2N-2)!}{m!(2N-2-m)!}}{\dfrac{(2N)!}{m!(2N-m)!}} \\ &= \frac{(2N-m)(2N-m-1)}{(2N)(2N-1)} \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned} E[X_1 + X_2 + \cdots + X_N] &= E[X_1] + \cdots + E[X_N] \\ &= \frac{(2N-m)(2N-m-1)}{2(2N-1)} \end{aligned}$$

مثال ۳ ج . مسأله جمع آوری کوپن . فرض کنید N نوع مختلف کوپن وجود دارد و هر زمان که کوپنی به دست می آوریم با شانس مساوی یکی از این N نوع می باشد .

۱ – میانگین تعدادانواع مختلف کوپنهایی را که در مجموعهٔ n کوپن وجود دارد پیدا کنید .

۲ – میانگین تعداد کوپنهایی را که یک فرد نیاز دارد جمع آوری کند ـ قبل از این که مجموعهٔ کاملی شامل حداقل یکی از هر نوع داشته باشد ـ حساب کنید .

حل : ۱ – فرض کنید X نمایش تعداد انواع مختلف کوپنها در مجموعهٔ n کوپن باشد . E [X] را با استفاده رابطه زیر حساب می کنیم

$$X = X_1 + \cdots + X_N$$

که در آن

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر حداقل یک کوپن از نوع در مجموعهٔ } n \text{ کوپن باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون

$$\begin{aligned} E[X_i] &= P\{X_i = 1\} \\ &= 1 - P\{\text{کوپنی از نوع } i \text{ در مجموعهٔ } n \text{ تایی نیست}\} \\ &= 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \end{aligned}$$

بنابراین

$$E[X] = E[X_1] + \cdots + E[X_n] = N\left[1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right]$$

۲ـ فرض کنید Y نمایش تعداد کوپنهای جمع آوری شده باشد قبل از این که مجموعهٔ کامل داشته باشیم. با استفاده از همان روشی که برای محاسبه میانگین متغیر تصادفی دوجمله ای منفی (مثال ۳ ت) به کار بردیم، $E[Y]$ را حساب می کنیم. یعنی فرض کنید پس از آن که i نوع کوپن متمایز جمع آوری کردیم، Y_i ، $i = 0, 1, ..., N-1$ ، تعداد کوپنهای اضافی لازم برای به دست آوردن یک نوع متمایز دیگر باشد. توجه کنید که

$$Y = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_{N-1}$$

لذا نتیجه می شود که کوپن جدید به دست آمده با احتمال $\left(\frac{N-i}{N}\right)$ از نوع متمایز است وقتی i نوع کوپن متمایز قبلاً جمع آوری کرده باشیم. بنابراین ،

$$P\{Y_i = k\} = \frac{N-i}{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{k-1} \qquad k \geq 1$$

یا به عبارت دیگر Y_i یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر $\frac{N-i}{N}$ می باشد. از مثال ۱ ث داریم

$$E[Y_i] = \frac{N}{N-i}$$

لذا نتیجه می شود که

$$E[Y] = 1 + \frac{N}{N-1} + \frac{N}{N-2} + \cdots + \frac{N}{1} = N\left[1 + \cdots + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N}\right]$$

مثال ۳ ح. ده شکارچی منتظر پرواز مرغابیها هستند. وقتی یک دسته از مرغابیها در بالای سر آنها پرواز می کنند شکارچیان در یک زمان شلیک می کنند ولی هریک هدف خود را بطور تصادفی مستقل از دیگران انتخاب می کند. اگر هر شکارچی هدف خود را مستقلاً با احتمال p بزند، در صورتی که یک دسته ده تایی در حال پرواز باشند میانگین تعداد مرغابیهایی را که صدمه ندیده فرار می کنند پیدا کنید.

حل: فرض کنید X_i ، $i = 1, 2, ..., 10$ برابر ۱ باشد اگر مرغابی i ام صدمه ندیده فرار کند و در غیر این صورت صفر باشد. میانگین مرغابیهایی را که صدمه ندیده فرار می کنند می توان به صورت زیر بیان کرد

$$E[X_1 + \cdots + X_{10}] = E[X_1] + \cdots + E[X_{10}]$$

برای محاسبهٔ $E[X_i] = P\{X_i = 1\}$ توجه کنید که هر شکارچی مستقلاً مرغابی i ام را با احتمال $\frac{p}{10}$ می زند و بنابراین

$$P\{X_i = 1\} = \left(1 - \frac{p}{10}\right)^{10}$$

بنابر این

$$E[X] = 10\left(1 - \frac{p}{10}\right)^{10}$$

مثال ۳ غ . میانگین تعداد گشتها. فرض کنید که یک دنباله از n تا ۱ و m تا 0 بطور تصادفی جابه جا می شوند به قسمی که هریک از $(n+m)!/(n!m!)$ ترتیب ممکن شانس مساوی دارند. هر رشته متوالی از ۱ها را یک گشت از ۱ها می نامیم ـ مثلاً ، اگر ۶ = n و ۴ = m و ترتیب به صورت 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0 باشد در این صورت سه گشت از ۱ها وجود دارد ـ می خواهیم میانگین تعداد این گشتها را محاسبه کنیم. برای محاسبه این کمیت فرض کنید

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر یک گشت از 1 ها از مکان } i \text{ ام شروع شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین $R(1)$ ، تعداد گشتهای ۱ را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$R(1) = \sum_{i=1}^{n+m} I_i$$

و لذا

$$E[R(1)] = \sum_{i=1}^{n+m} E[I_i]$$

اکنون

$$E[I_1] = P\{\text{" 1 " در مکان 1 باشد}\}$$
$$= \frac{n}{n+m}$$

و برای $1 < i \le n+m$

$$E[I_i] = P\{\text{" 0 " در مکان } i-1 \text{ و " 1 " در مکان } i \text{ باشد}\}$$
$$= \frac{m}{n+m}\,\frac{n}{n+m-1}$$

بنابراین

$$E[R(1)] = \frac{n}{n+m} + (n+m-1)\frac{nm}{(n+m)(n+m-1)}$$

بطور مشابه، میانگین گشت 0 ها یعنی $E[R(0)]$ برابر است با

$$E[R(0)] = \frac{m}{n+m} + \frac{nm}{n+m}$$

و میانگین گشت هردوی آنها برابر است با

$$E[R(1) + R(0)] = 1 + \frac{2nm}{n+m}$$

مثال ۳ د. یک دست کارت معمولی را در نظر گرفته و هربار یک کارت رو می کنیم. میانگین کارتهای روشده برای اینکه (۱) یک آس و (۲) یک پیک داشته باشیم چقدر است؟

حل : هردو قسمت (۱) و (۲) حالت خاصی از مسأله زیر است: فرض کنید از کیسه ای که شامل n توپ سفید و m توپ سیاه است توپها را یک به یک از کیسه خارج کنیم تا اولین توپ سفید به دست آید. اگر X نمایش تعداد توپهای خارج شده باشد، $E[X]$ را بیابید.

برای حل این مسأله فرض کنید توپهای سیاه در کیسه با b_1 ، b_2 ، . . . ، b_m نامگذاری شده اند. اگر برای $i = 1,2,\ldots,m$ فرض کنیم

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } b_i \text{ قبل از هر توپ سفیدی بیـــرون آید} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین بسادگی دیده می شود

$$X = 1 + \sum_{i=1}^{m} X_i$$

بنابراین

$$E[X] = 1 + \sum_{i=1}^{m} P\{X_i = 1\}$$

در هر صورت اگـر توپ b_i قبل از هریک از n توپ سـفیـد بیـرون آید X_i برابر ۱ می باشد. ولی چون هریک از $n + 1$ توپ (n توپ سـفیـد و توپ b_i) با احتمـال مسـاوی می توانند اولین توپ به دست آمده از این مجموعه باشند، بنابراین داریم

$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{1}{n+1}$$

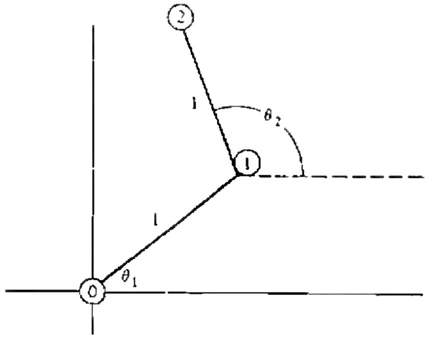
بنابر این

$$E[X] = 1 + \frac{m}{n+1}$$

مثـال ۳ ذ. گـام برداری تصـادفی در صفحه. جـسـمی را کـه نخسـت در نقطهٔ مـعلومی از صـفـحه قـرار دارد در نظر بگیـرید و فـرض کنیـد کـه دنبالـه ای از گامـهـا با طول ثابت واحد ولی در جهت کاملاً تصـادفی برداشته می شود. بخصوص، فرض کنید کـه مکان جدید بعد از هر گام به فـاصلهٔ یک واحـد از مکـان قـبـلی بوده و زاویـه تعـیـین مـوقـعـیـت آن با مکـان قـبـلی دارای توزیع یکنواخت روی $(0, 2\pi)$ است (شکل ۷-۲). مـربع فـاصله را از مبـدأ پس از n گام بیابید.

حل: فـرض کنیـد (X_i, Y_i) نمایش تـغـیـیـر وضـعـیت در گـام i ام، $i = 1,2,\ldots,n$، در مختصات دکارتی باشد. داریم

$$X_i = \cos\theta_i$$
$$Y_i = \sin\theta_i$$



(0) = مکان نخست
(1) = مکان پس از گام اول
(2) = مکان پس از گام دوم

شکل ۷-۲

وقتی بنا به فرض θ_iها ، $i = 1, 2, \ldots, n$ متغیرهای تصادفی مستقل یکنواخت روی $(0, 2\pi)$ باشند، چون مکان پس از n گام دارای مختصات دکارتی $(\Sigma X_i, \Sigma Y_i)$ است ، دیده می شود که D^2 ، مربع فاصله در مبدأ ، به صورت زیر است .

$$\begin{aligned} D^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 + Y_i^2) + \sum\sum_{i \neq j} (X_i X_j + Y_i Y_j) \\ &= n + \sum\sum_{i \neq j} (\cos\theta_i \cos\theta_j + \sin\theta_i \sin\theta_j) \end{aligned}$$

که در آن از رابطهٔ $\cos^2\theta_i + \sin^2\theta_i = 1$ استفاده می شود . با گرفتن میانگین و به کار بردن استقلال θ_i، θ_j وقتی $i \neq j$ و این حقیقت که

$$E[\cos\theta_i] = \int_0^{2\pi} \cos u \, du = \sin 2\pi - \sin 0 = 0$$

$$E[\sin\theta_i] = \int_0^{2\pi} \sin u \, du = \cos 0 - \cos 2\pi = 0$$

نتیجه می شود که

$$E[D^2] = n$$

وقتی با یک دسته بی نهایت از متغیرهای تصادفی X_i, $i \geq 1$ ، که هریک دارای میانگین متناهی اند مواجهیم ، لزومی ندارد که داشته باشیم

$$E\left[\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X_i] \tag{۳-۴}$$

برای تعیین این که رابطهٔ (۳-۴) چه وقت درست است، توجه کنید که $\sum_{i=1}^{\infty} X_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} X_i$ و بنابر این

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right] &= E\left[\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &\stackrel{?}{=} \lim_{n \to \infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} E[X_i] \end{aligned} \tag{۳-۵}$$

بنابراین وقتی تعویض عمل میانگین و حد در معادله (۳-۵) درست باشد معادلهٔ (۳-۴) برقرار است . گرچه بطور کلی این تعویض درست نیست ، ولی می توان نشان داد که در دو حالت مهم زیر درست است :

۱- X_iها همگی متغیرهای تصادفی نامنفی باشند (یعنی $P\{X_i \geq 0\} = 1$ برای تمام iها) .

۲- $\sum_{i=1}^{\infty} E[|X_i|] < \infty.$

مثال ۳ ر . متغیر تصادفی نامنفی X بامقادیر صحیح را درنظر می گیریم ، اگر برای هر $i \geq 1$ ، تعریف کنیم

$$X_i = \begin{cases} 1 & X \geq i \\ 0 & X < i \end{cases}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} X_i &= \sum_{i=1}^{X} X_i + \sum_{i=X+1}^{\infty} X_i \\ &= \sum_{i=1}^{X} 1 + \sum_{i=X+1}^{\infty} 0 \\ &= X \end{aligned}$$

بنابراین چون تمام X_i ها نا منفی اند، داریم

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=1}^{\infty} E(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P\{X \geq i\}
\end{aligned}
\tag{۶-۳}
$$

که یک تساوی مفید است.

مثال ۳ ز - فرض کنید n شیئ که آنها را ۱، ۲، . . . . . ، n می نامیم باید در یک کامپیوتر به صورت یک لیست مرتب ذخیره شوند. در هر واحد زمان یکی از این اشیاء فرا خوانده می شود، شیئ i ام را مستقل از گذشته با احتمال $P(i)$ ، $i \geq 1$ ، $\sum_i P(i) = 1$ فرا می خوانیم. فرض کنید این احتمالات معلومند، به چه ترتیبی اشیاء را فرا خوانیم تا میانگین مکان اشیاء فراخوانده شده مینیمم گردد.

حل : فرض کنید اشیاء چنان شماره گذاری شده اند که $P(1) \geq P(2) \geq \ldots \geq P(n)$. برای این که نشان دهیم ۱ ، ۲ ، ... ، n ترتیب بهینه است، فرض کنید X نمایش مکان شیئ فراخوانده شده باشد. اکنون تحت هر ترتیبی ، به عنوان مثال $O = i_1, i_2, \ldots, i_n$ داریم

$$
\begin{aligned}
P_O\{X \geq k\} &= \sum_{j=k}^{n} P(i_j) \\
&\geq \sum_{j=k}^{n} P(j) \\
&= P_{1,2,\ldots,n}\{X \geq k\}
\end{aligned}
$$

با جمع بندی روی k و بنابر معادلهٔ (۳-۶) ، داریم

$$E_O[X] \geq E_{1,2,\ldots,n}[X]$$

این نشان می دهد که با مرتب کردن اشیاء به ترتیب نزولی برحسب احتمالات فراخوانی آنها میانگین مکان اشیاء فرا خوانده شده را مینیمم می کند.

مثال ۳ ز. احتمال اجتماع پیشامدها. فرض کنید A_1 ، ... ، A_n نمایش پیشامدها باشند و متغیرهای نشانگر X_i ، $i = 1, \ldots, n$ ، را به صورت زیر تعریف کنید

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{رخ دهد } A_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال، توجه کنید که

$$1-\prod_{i=1}^{n}(1-X_i)=\begin{cases}1 & \text{رخ دهد } \cup A_i\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

بنابراین

$$E\left[1-\prod_{i=1}^{n}(1-X_i)\right]=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)$$

با بسط سمت چپ رابطهٔ فوق نتیجه می شود

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i<j}\sum X_iX_j+\sum_{i<j<k}\sum\sum X_iX_jX_k - \cdots + (-1)^{n+1}X_1\cdots X_n\right] \tag{۷-۳}$$

در حالی که

$$X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k}=\begin{cases}1 & \text{رخ دهد } A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

دیده می شود

$$E[X_{i_1}\cdots X_{i_k}]=P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})$$

و بنابراین (۳-۷) دقیقاً فرمول مشهور مربوط به اجتماع پیشامدها را بیان می کند.

$$P(\cup A_i)=\sum P(A_i)-\sum_{i<j}\sum P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}\sum\sum P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n+1}P(A_1\cdots A_n)$$

۴ - واریانس

متغیر تصادفی X و تابع توزیع آن، F، را در نظر می گیریم، اگر بتوان خواص لازم F را با بعضی اندازه های تعریف شدهٔ مناسب خلاصه کرد بسیار مفید خواهد بود. یکی از این اندازه ها $E[X]$ ، امید ریاضی X ، است. با این که $E[X]$ متوسط موزون مقادیر ممکن X را می دهد ولی چیزی در باره تغییرات یا پراکندگی این مقادیر بیان نمی کند. مثلاً با این که

متغیرهای تصادفی W ، Y و Z با توابع جرم احتمال به صورت زیر

$W = 0$ با احتمال 1

$Y = \begin{cases} -1 & \text{با احتمال } \frac{1}{2} \\ +1 & \text{با احتمال } \frac{1}{2} \end{cases}$

$Z = \begin{cases} -100 & \text{با احتمال } \frac{1}{2} \\ +100 & \text{با احتمال } \frac{1}{2} \end{cases}$

همگی دارای میانگین مساوی، یعنی 0 ، هستند پراکندگی بیشتری در مقادیر ممکن Y نسبت به مقادیر W (که ثابت است) و پراکندگی بیشتری در مقادیر ممکن Z نسبت به مقادیر Y وجود دارد .

اگر چنان که انتظار داریم X مقادیری حول میانگین خود E [X] اختیار کند، به نظر می رسد که روش مناسب اندازه گیری واریانس X این باشد که بدانیم پراکندگی X نسبت به میانگین خودش بطورمتوسط چقدر است . یک روش ممکن برای اندازه گیری این است که کمیت $E[|X - \mu|]$ را که در آن $\mu = E[X]$ حساب کنیم، ولی نتیجه می شود که کاربرد این کمیت از نظر ریاضی مناسب به نظر نمی رسد و بنابراین کمیت مناسبتری ، یعنی میانگین مربع تفاضل بین X و میانگین آن ، را معمولاً در نظر می گیرند. بنابراین تعریف زیر را داریم.

تعریف

اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ باشد در این صورت واریانس X که با نماد Var (X) نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود

$$\operatorname{Var}(X) = E[(X-\mu)^2]$$

مثال ۴ الف . واریانس یك متغیر نرمال. X یک متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای μ و σ^2 است، Var (X) را بیابید.

حل : خاطرنشان می سازیم (مثال ۱ خ را ببینید) که $E[X] = \mu$ ، پس

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= E[(X-\mu)^2] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx \qquad (۴-۱)\end{aligned}$$

از معادلهٔ (۴-۱) با فرض $y = (x-\mu) / \sigma$ ، نتیجه می شود

$$\operatorname{Var}(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2/2}\, dy$$

با انتگرال گیری جزء به جزء

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-ye^{-y^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy \right] \\
&= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

می توان فرمول دیگری برای $\operatorname{Var}(X)$ به صورت زیر به دست آورد .

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X) &= E[(X-\mu)^2] \\
&= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\
&= E[X^2] - E[2\mu X] + E[\mu^2] \\
&= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\
&= E[X^2] - \mu^2
\end{aligned}$$

یعنی

$$\operatorname{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \qquad (۴-۲)$$

به عبارت دیگر ، واریانس X برابر امید ریاضی X^2 منهای مربع امید ریاضی X است . معمولاً در عمل این ساده ترین روش محاسبه $\operatorname{Var}(X)$ است .

مثال ۴ ب . اگر X نمایش برآمد پرتاب یک تاس سالم باشد، $\operatorname{Var}(X)$ را حساب کنید .

حل : در مثال ۱ الف نشان داده شد که $E[X] = \frac{7}{2}$ ، همچنین

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= 1^2(\tfrac{1}{6}) + 2^2(\tfrac{1}{6}) + 3^2(\tfrac{1}{6}) + 4^2(\tfrac{1}{6}) + 5^2(\tfrac{1}{6}) + 6^2(\tfrac{1}{6}) \\
&= (\tfrac{1}{6})(91)
\end{aligned}$$

بنابر این

$$\operatorname{Var}(X) = \tfrac{91}{6} - (\tfrac{7}{2})^2 = \tfrac{35}{12}$$

مثال ۴ پ : واریانس متغیر تصادفی دو جمله ای X با پاوامترهای n و p را حساب کنید .

حل : نخست $E[X^2]$ را به صورت زیر حساب می کنیم .

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{n} i^2 \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

برای محاسبهٔ مقدار فوق با استفاده از تساوی $i^2 = i(i-1) + i$ نتیجه می شود

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\frac{n!}{(n-i)!\,i!}p^i(1-p)^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=2}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,(i-2)!}p^i(1-p)^{n-i} + E[X] \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{i=2}^{n} \binom{n-2}{i-2} p^{i-2}(1-p)^{n-i} + E[X] \\
&= n(n-1)p^2[p + (1-p)]^{n-2} + E[X] \\
&= n(n-1)p^2 + E[X]
\end{aligned}$$

چون $E[X] = np$ (از مثال (ب) ، نتیجه می شود

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\
&= np(1-p)
\end{aligned}$$

برای هر ثابت a ، b یک تساوی مفید عبارت است از

$$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X) \tag{۳-۴}$$

برای اثبات معادلهٔ (۴-۳) با توجه به نتیجه ۲-۱ داریم $E[aX+b] = aE[X] + b$ بنابراین

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(aX+b) &= E[(aX+b-(aE[X]+b))^2] \\
&= E[(aX-aE[X])^2] \\
&= E[a^2(X-E[X])^2] \\
&= a^2E[(X-E[X])^2] \\
&= a^2\,\mathrm{Var}(X)
\end{aligned}$$

تبصره ـ مشابه آنچه که میانگین مرکز ثقل یک توزیع جرم است . در اصطلاح مکانیک ، گشتاور ایستا (ممان اینرسی) را نشان می دهد

۵- کوواریانس ، واریانس مجموع و همبستگی

با حکم زیر که نشان می دهد میانگین حاصلضرب متغیرهای مستقل برابر حاصلضرب میانگینهاست ، شروع می کنیم .

حکم ۵-۱

اگر X و Y مستقل باشند در این صورت برای هر تابع f و g داریم

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

برهان : فرض کنید که Y, X با چگالی مشترك f(x , y) تواماً پیوسته اند ، در این صورت

$$\begin{aligned}E[g(X)h(Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f(x, y)\, dx\, dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f_X(x)f_Y(y)\, dx\, dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(y)f_Y(y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\, dx\\ &= E[h(Y)]E[g(X)]\end{aligned}$$

حالت گسسته اثبات مشابهی دارد .

کوواریانس هردو متغیر تصادفی X و Y که آن را با Cov (X , Y) نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

با بسط سمت راست معادلهٔ قبل نتیجه می‌شود ،

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= E[XY - E[X]Y - XE[Y] + E[Y]E[X]]\\ &= E[XY] - E[X]E[Y] - E[X]E[Y] + E[X]E[Y]\\ &= E[XY] - E[X]E[Y]\end{aligned}$$

توجه کنید اگر X . Y مستقل باشند، بنابر حکم ۵-۱ نتیجه می شود که $\mathrm{Cov}(x, y) = 0$ ؛ ولی عکس آن درست نیست . یک مثال ساده از دو متغیر تصادفی وابسته X و Y که دارای کوواریانس صفرند به طریق زیر به دست می آید : فرض کنید X متغیر تصادفی باشد به قسمی که

$$P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \tfrac{1}{3}$$

و تعریف کنید

$$Y = \begin{cases} 0 & X \neq 0 \\ 1 & X = 0 \end{cases}$$

اکنون داریم $XY = 0$ و بنابر این $E[XY] = 0$. همچنین $E[X] = 0$ و بنابراین

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$$

در حالی که X ، Y بطور واضح مستقل نیستند.

می توان عبارت مفید زیر را برای واریانس مجموع دو متغیر تصادفی بر حسب کوواریانس به دست آورد

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X + Y) &= E[(X + Y - E[X + Y])^2] \\
&= E[(X + Y - EX - EY)^2] \\
&= E[((X - EX) + (Y - EY))^2] \\
&= E[(X - EX)^2 + (Y - EY)^2 + 2(X - EX)(Y - EY)] \\
&= E[(X - EX)^2] + E[(Y - EY)^2] \\
&\quad + 2E[(X - EX)(Y - EY)] \\
&= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\,\text{Cov}(X, Y)
\end{aligned}$$

در حقیقت ، با استفاده از بحث مشابهی می توان ثابت کرد

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum \text{Cov}(X_i, X_j) \tag{۵-۱}$$

اگر X_1 ، ... ، X_n دو به دو مستقل باشند معادلهٔ (۵ - ۱) به معادلهٔ زیر تبدیل می شود

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) \tag{۵-۲}$$

مثال ۵ الف. واریانس متغیر تصادفی دو جمله‌ای. واریانس متغیر تصادفی دو جمله‌ای X با پارامترهای n و p را بیابید.

حل : چون چنین متغیر تصادفی نمایش تعداد موفقیتها در n آزمایش مستقل است وقتی هر آزمایش با احتمال مشترک p یک موفقیت باشد، می توان نوشت

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

که در آن X_i ها متغیرهای تصادفی برنولی مستقلند، به قسمی که

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{آزمایش } i \text{ ام موفقیت باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین، از معادلهٔ (۵-۲) نتیجه می شود

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \cdots + \text{Var}(X_n)$$

ولی

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_i) &= E[X_i^2] - (E[X_i])^2 \\ &= E[X_i] - (E[X_i])^2 \qquad\qquad X_i^2 = X_i \\ &= p - p^2 \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\text{Var}(X) = np(1-p)$$

مثال ۵ ب . واریانس تعداد جوربودن . واریانس X ، تعداد مردانی که کلاه خودشان را در مثال ۳ پ انتخاب می کنند، را بیابید

حل : X را همانند مثال ۳ پ در نظر می گیریم، یعنی

$$X = X_1 + \cdots + X_N$$

وقتی

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{مرد } i \text{ ام کلاه خودش را انتخاب کند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

از معادلهٔ (۵ - ۱) نتیجه می شود

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{N} \text{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum \text{Cov}(X_i, X_j) \tag{۵-۳}$$

چون $P\{X_i = 1\} = 1/N$ ، از مثال قبل دیده می شود که

$$\text{Var}(X_i) = \frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right) = \frac{N-1}{N^2}$$

همچنین

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j]$$

اکنون

$$X_iX_j = \begin{cases} 1 & \text{مرد } i \text{ ام و } j \text{ ام هر دو کلاه خودشان را انتخاب کنند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و بنابر این

$$\begin{aligned} E[X_iX_j] &= P\{X_i = 1, X_j = 1\} \\ &= P\{X_i = 1\}P\{X_j = 1 | X_i = 1\} \\ &= \frac{1}{N}\frac{1}{N-1} \end{aligned}$$

پس

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{N(N-1)} - \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N^2(N-1)}$$

و از معادلهٔ (۵ - ۳) ، داریم

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \frac{N-1}{N} + 2\binom{N}{2}\frac{1}{N^2(N-1)} \\ &= \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} \\ &= 1 \end{aligned}$$

بنابراین میانگین و واریانس تعداد جور بودنها هردو برابر ۱ است. این نتیجه تا حدی غیرمنتظره نیست، زیرا همچنان که در بخش ۵ فصل ۲ نشان دادیم وقتی N بزرگ است احتمال i جور بودن تقریباً برابر $\frac{e^{-1}}{i!}$ است. یعنی، وقتی N بزرگ باشد تعداد جور بودنها تقریباً دارای توزیع پواسن با میانگین ۱ است. بنابراین چون میانگین و واریانس متغیر تصادفی پواسن برابرند. (تمرین نظری ۱۰ را ببینید)، نتیجهٔ حاصل در این مثال تعجب انگیز نیست.

مثال ۵ پ. نمونه گیری از یك جمعیت متناهی. مجموعه ای از N فرد را در نظر می گیریم که هرکدام دارای عقیده ای در باره موضوع خاصی هستند که با عدد حقیقی v سنجیده می شود. v «شدت احساس» فرد را درباره موضوع نشان می دهد. شدت احساس فرد i ، $i = 1, 2, \ldots, N$ را با v_i نشان می دهیم وفرض می کنیم این کمیتها v_i ، $i = 1, 2, \ldots, N$ مجهولند و برای جمع آوری

اطلاعات « با انتخاب تصادفی» یک گروه n تایی از N فرد را انتخاب می کنیم، بدین معنی که تمام $\binom{N}{n}$ زیر مجموعه با حجم n با احتمال مساوی انتخاب می شوند. اگر S نمایش مجموع n مقدار نمونه گیری شده باشد، میانگین و واریانس آن را بیابید.

کاربرد مهم مطلب فوق در انتخابات است که قبل از انتخابات هر فرد در جامعه موافق یا مخالف کاندیدای معینی یا موضوع خاصی است. اگر فرد i موافق باشد v_i را مساوی ۱ و اگر مخالف باشد 0 در نظر می گیریم. بنابراین $\bar{v} = \sum_{i=1}^{N} \frac{v_i}{N}$ نسبتی از جامعه را که موافقند نشان می دهد. برای برآورد $\bar{v}$ ، یک نمونه تصادفی n تایی از کسانی که رأی داده اند انتخاب می کنیم. نسبت آنهایی که موافق رأی داده اند - یعنی $\frac{S}{n}$ - را اغلب به عنوان برآورد $\bar{v}$ به کار می برند.

حل: برای هر فرد i ، $i = 1, 2, \ldots, N$ یک متغیر نشانگر I_i برای تشخیص این که شخص در نمونه هست یا خیر، تعریف می کنیم. یعنی

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{فرد } i \text{ در نمونه تصادفی باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون S را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$S = \sum_{i=1}^{N} v_i I_i$$

و بنابراین

$$E[S] = \sum_{i=1}^{N} v_i E[I_i]$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(S) &= \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Var}(v_i I_i) + 2 \sum_{i<j}\sum \operatorname{Cov}(v_i I_i, v_j I_j) \\ &= \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \operatorname{Var}(I_i) + 2 \sum_{i<j}\sum v_i v_j \operatorname{Cov}(I_i, I_j) \end{aligned}$$

چون

$$E[I_i] = \frac{n}{N}$$

$$E[I_i I_j] = \frac{n}{N}\,\frac{n-1}{N-1}$$

دیده می شود که

$$\operatorname{Var}(I_i) = \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

$$\operatorname{Cov}(I_i, I_j) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{n}{N}\right)^2$$

$$= \frac{-n(N-n)}{N^2(N-1)}$$

بنابراین

$$E[S] = n \sum_{i=1}^{N} \frac{v_i}{N} = n\bar{v}$$

$$\operatorname{Var}(S) = \frac{n}{N}\left(\frac{N-n}{N}\right) \sum_{i=1}^{N} v_i^2 - \frac{2n(N-n)}{N^2(N-1)} \sum_{i<j}\sum v_i v_j$$

عبـارت $\operatorname{Var}(S)$ را با اسـتفـاده از $(v_1 + \dots + v_N)^2 = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 + 2 \sum_{i<j}\sum v_i v_j$ می‌توان تا حدی خلاصه نمود. پس از ساده کردن داریم

$$\operatorname{Var}(S) = \frac{n(N-n)}{N-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}{N} - \bar{v}^2\right)$$

اکنون حالت خاصی را که در آن Np تا از v ها برابر ۱ و بقیه برابر ο اند در نظر می‌گیریم. آن‌گاه در این حالت S متغیر تصادفی فوق هندسی است و میانگین و واریانس آن عبارت است از

$$E[S] = n\bar{v} = np \qquad \bar{v} = \frac{Np}{N} = p$$

$$\operatorname{Var}(S) = \frac{n(N-n)}{(N-1)}\left(\frac{Np}{N} - p^2\right) = \frac{n(N-n)}{N-1} p(1-p)$$

کمیت $\frac{S}{n}$ ، یعنی نسبت کسانی که نمونه‌گیری شده و دارای مقدار ۱ می‌باشند، به قسمی است که

$$E\left[\frac{S}{n}\right] = p$$

$$\operatorname{Var}\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{(N-n)}{n(N-1)} p(1-p)$$

همبستگی دو متغیر X و Y که آن را با $\rho(X, Y)$ نشان می دهیم، (با فرض مثبت بودن $\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)$) به صورت زیر تعریف می شود

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}$$

می توان نشان داد

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1 \qquad (۴-۵)$$

برای اثبات معادلهٔ (۵ - ۴) فرض کنید X و Y به ترتیب دارای واریانس σ^2_X و σ^2_Y باشند، در این صورت

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma_x} + \frac{Y}{\sigma_y}\right) \\ &= \frac{\mathrm{Var}(X)}{\sigma_x^2} + \frac{\mathrm{Var}(Y)}{\sigma_y^2} + \frac{2\,\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} \\ &= 2[1 + \rho(X, Y)] \end{aligned}$$

نتیجه می شود که

$$-1 \leq \rho(X, Y)$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma_x} - \frac{Y}{\sigma_y}\right) \\ &= \frac{\mathrm{Var}(X)}{\sigma_x^2} + \frac{\mathrm{Var}\, Y}{(-\sigma_y)^2} - \frac{2\,\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} \\ &= 2[1 - \rho(X, Y)] \end{aligned}$$

نتیجه می شود که

$$\rho(X, Y) \leq 1$$

و اثبات معادلهٔ (۵ - ۴) کامل می گردد.

در حقیقت، چون $\mathrm{Var}(Z) = 0$ ایجاب می کند که Z با احتمال 1 ثابت باشد(این حقیقت

بدیهی را بطور دقیق در فصل ۸ ثابت خواهیم کرد). از اثبات (۵-۴) دیده می شود که $\rho(X , Y)$ ایجــاب می کنــد $Y = a + bX$ کــه در آن $b = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} > 0$ و $\rho(X , Y) = -1$ ایجاب می کند: $Y = a + bX$ وقتی $b = \frac{-\sigma_Y}{\sigma_X} < 0$. عکس آن نیـز درسـت است کـه اگـر $Y = a + bX$ باشـد در این صورت $\rho (X , Y)$ برحسب عـلامت b برابر ۱+ یا ۱- می باشـد. (به عنوان تمرین آن را ثابت کنید).

ضریب همبستگی اندازه مرتبه حالت خطی بین X و Y است. مقدار $\rho (X , Y)$ نزدیک به ۱+ یا ۱- مرتبه بالایی ازحالت خطی بین X، Y رانشان می دهد درصورتی که مقدار $\rho (X , Y)$ نزدیک صـفر، عـدم چنین حالت خطی را نشـان می دهد. مقـدارمثبت $\rho (X , Y)$ نشان می دهدکه افزایشX باعث افزایشY می شود، درحالی که مقدار منفی $\rho (X , Y)$ نشانه این است که افزایش X باعث کاهش Y می گردد. اگر $\rho (X, Y) = 0$ ، دراین صورت X و Y را ناهمبسته گوییم.

مثال ۵ ت. فرض کنید I_A و I_B متغیرهای نشانگر برای پیشامدهای A و B باشند، یعنی

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{اگر } A \text{ رخ دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$I_B = \begin{cases} 1 & \text{اگر } B \text{ رخ دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابر این

$$\begin{aligned} E[I_A] &= P(A) \\ E[I_B] &= P(B) \\ E[I_A I_B] &= P(AB) \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Cov}(I_A, I_B) &= P(AB) - P(A)P(B) \\ &= P(B)[P(A \mid B) - P(A)] \end{aligned}$$

لذا این نتیجه کـاملاً بدیهی را به دست می آوریم که متغیرهای نشانگر برای پیشامدهای A و B برحسب این که $P (A \mid B)$ بزرگتر، مساوی، یا کوچکتر از $P (A)$ باشد به ترتیب وابستگی مثبت دارند، نا بسته اند، و یا وابستگی منفی دارند.

با توجه به کوواریانسها یک نتیجه مفید عبارت است:

$$\operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{m} Y_i\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Cov}(X_i, Y_j) \qquad (۵-۵)$$

عبارت فوق را به عنوان تمرین ثابت کنید. کاربرد آن را با مثال زیر شرح می دهیم.

مثال ۵ ث. m آزمایش مستقل که هریک از آنها دارای r برآمدممکن با احتمالات P_1 ، P_2 ، ... ، P_r ، $\sum_{i=1}^{r} P_i = 1$ است در نظر می گیریم. اگر فرض کنیم N_i ، $i = 1,2,\ldots,r$ ، نمایش تعداد از m آزمایش باشد که حاصل آن برآمد i است در این صورت N_1 ، ... ، N_r دارای توزیع چند جمله ای است.

$$P\{N_1 = n_1, N_2 = n_2, \ldots, N_r = n_r\}$$
$$= \frac{m!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!} P_1^{n_1} P_2^{n_2} \cdots P_r^{n_r} \qquad \sum_{i=1}^{r} n_i = m$$

برای $i \neq j$ وقتی N_i بزرگ باشد مناسب به نظر می رسد که N_j باید کوچک باشد و از این رو بدیهی است که آنها وابستگی منفی داشته باشند. با استفاده از تساوی (۵-۵) و عبارت زیر کوواریانس آنها را حساب می کنیم

$$N_i = \sum_{k=1}^{m} I_i(k) \qquad \text{و} \qquad N_j = \sum_{k=1}^{m} I_j(k)$$

که در آن

$$I_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{آزمایش } k \text{ ام منجر به برآمد } i \text{ شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$I_j(k) = \begin{cases} 1 & \text{آزمایش } k \text{ ام منجر به برآمد } j \text{ شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

از معادلهٔ (۵-۵) داریم

$$\operatorname{Cov}(N_i, N_j) = \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Cov}(I_i(k), I_j(\ell))$$

اکنون وقتی $k \neq \ell$ باشد داریم

$$\operatorname{Cov}(I_i(k), I_j(\ell)) = 0$$

چون نتیجهٔ آزمایش k ام مستقل از نتیجه آزمایش l ام است. از طرف دیگر

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(I_i(\ell), I_j(\ell)) &= E[I_i(\ell)I_j(\ell)] - E[I_i(\ell)]E[I_j(\ell)]\\ &= 0 - P_iP_j = -P_iP_j\end{aligned}$$

که در آن از تساوی $I_i(l)\, I_j(l) = 0$ استفاده می شود زیرا آزمایش l نمی تواند به دو برآمد i و j منجر شود، لذا

$$\mathrm{Cov}\,(N_i, N_j) = -mP_iP_j$$

و این با درك شهودی که N_i و N_j بطور منفی وابسته اند مطابقت دارد.

۶- میانگین شرطی

۶-۱ تعاریف

خاطر نشان می سازیم که اگر X، Y متغیرهای تصادفی تواماً گسسته باشند، تابع جرم احتمال شرطی X به شرط آن که $Y = y$ باشد برای تمام y ها به قسمی که $P\{Y=y\} > 0$ به صورت زیر تعریف می شود

$$p_{X|Y}(x|y) = P\{X = x \mid Y = y\} = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

در این حالت طبیعی است که میانگین شرطی X به شرط آن که $Y = y$ باشد برای تمام مقادیر y به قسمی که $P\{Y = y\} > 0$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\begin{aligned}E[X \mid Y = y] &= \sum_x xP\{X = x \mid Y = y\}\\ &= \sum_x xp_{X|Y}(x|y)\end{aligned}$$

مثال ۶ الف. اگر X و Y متغیرهای تصادفی دوجمله ای مستقل با پارامترهای یکسان n , p باشند امید ریاضی شرطی X را به شرط این که $X + Y = m$ باشد حساب کنید.

حل: نخست تابع جرم احتمال شرطی X را به شرط آن که $X = Y = m$ باشد حساب می کنیم. برای $k \le \min(n, m)$ داریم

$$P\{X = k \mid X + Y = m\} = \frac{P\{X = k, X + Y = m\}}{P\{X + Y = m\}}$$

$$= \frac{P\{X = k, Y = m - k\}}{P\{X + Y = m\}}$$

$$= \frac{P\{X = k\}P\{Y = m - k\}}{P\{X + Y = m\}}$$

$$= \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n-m+k}}{\binom{2n}{m} p^m (1-p)^{2n-m}}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}$$

که در آن از این موضوع که $X + Y$ متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای $2n$ و p است استفاده نموده‌ایم (مثال ۳ ت از فصل ۶ را ملاحظه نمایید). از این رو توزیع شرطی X به شرط آن که $X + Y = m$ باشد یک توزیع فوق هندسی است. بنابراین طبق مثال ۳ ت ، داریم

$$E[X|X + Y = m] = \frac{m}{2}$$

بطور مشابه، یادآوری می کنیم که اگر X و Y توأماً پیوسته با تابع چگالی توأم $f(x, y)$ باشند، چگالی احتمال شرطی X به شرط آن که $Y = y$ برای تمام مقادیر y به قسمی که $f_Y(y) > 0$ ، به صورت زیر تعریف می شود

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

در این حالت طبیعی است که میانگین شرطی X به شرط $Y = y$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

به شرط آن که $f_Y(y) > 0$.

مثال ۶ ب . فرض کنید چگالی مشترك X و Y به صورت زیر باشد

$$f(x, y) = \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y} \qquad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

$E[X|Y = y]$ را حساب کنید.

حل : با محاسبهٔ چگالی شرطی شروع می کنیم

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \\
&= \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx} \\
&= \frac{(1/y)e^{-x/y}e^{-y}}{\int_0^{\infty} (1/y)e^{-x/y}e^{-y}\, dx} \\
&= \frac{(1/y)e^{-x/y}}{\int_0^{\infty} (1/y)e^{-x/y}\, dx} \\
&= \frac{(1/y)e^{-x/y}}{-e^{-x/y}\Big|_{x=0}^{x=\infty}} \\
&= \left(\frac{1}{y}\right) e^{-x/y}
\end{aligned}
$$

از این رو توزیع شرطی X به شرط آن که $Y = y$ ، همان توزیع نمایی با میانگین y است . بنابراین

$$
E[X|Y = y] = \int_0^{\infty} \frac{x}{y} e^{-x/y}\, dx = y
$$

تبصره : همان طور که احتمالات شرطی در تمام خواص احتمالات معمولی صدق می کنند میانگینهای شرطی نیز خواص میانگینهای معمولی را دارا می باشند . مثلاً ، فرمولهایی نظیر

$$
E[g(X)|Y = y] = \begin{cases} \sum_x g(x) p_{X|Y}(x|y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y)\, dx \end{cases}
$$

و

$$
E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i | Y = y\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i | Y = y]
$$

معتبر باقی می مانند . حقیقت امر این است که میانگین شرطی با فرض $Y = y$ را می توان به صورت میانگین معمولی روی فضای نمونهٔ کاهش یافته در نظر گرفت ، وقتی فضا تنها شامل برآمدی است که برای آنها $Y = y$ می باشد .

۶-۴ محاسبه میانگینها با شرطی کردن

تابعی از متغیر تصادفی Y را که مقدار آن در $Y = y$ برابر $E[X|Y = y]$ است ،

به صورت $E[X \mid Y]$ نشان می دهیم . توجه کنید که $E[X \mid Y]$ خود یک متغیر تصادفی است . یک خاصیت بسیار مهم میانگین شرطی را در حکم زیر بیان می کنیم .

حکم ۶-۱

$$E[X] = E[E[X \mid Y]] \tag{۶-۱}$$

اگر Y یک متغیر تصادفی گسسته باشد معادلهٔ (۶-۱) بیان می کند که

$$E[X] = \sum_y E[X \mid Y = y]P\{Y = y\} \tag{۶-۱ الف}$$

در صورتی که اگر Y پیوسته با چگالی $f_Y(y)$ باشد، معادلهٔ (۶-۱) بیان می کند که

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X \mid Y = y]f_Y(y)\,dy \tag{۶-۱ ب}$$

اکنون اثبات معادله (۶ - ۱) را در حالتی که X و Y هردو متغیر تصادفی گسسته اند ارائه می دهیم

برهان معادله (۶ -۱) وقتی X و Y هردو گسسته اند : باید نشان دهیم که

$$E[X] = \sum_y E[X \mid Y = y]P\{Y = y\} \tag{۶-۲}$$

اکنون سمت راست معادلهٔ (۶ - ۲) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}
\sum_y E[X \mid Y = y]P\{Y = y\} &= \sum_y \sum_x xP\{X = x \mid Y = y\}P\{Y = y\} \\
&= \sum_y \sum_x x\frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}}P\{Y = y\} \\
&= \sum_y \sum_x xP\{X = x, Y = y\} \\
&= \sum_x x \sum_y P\{X = x, Y = y\} \\
&= \sum_x xP\{X = x\} \\
&= E[X]
\end{aligned}$$

و نتیجه حاصل می شود .

یک روش برای فهمیدن معادله (۶-۲) تشریح آن به صورت زیر است : برای محاسبهٔ E [X] می توان متوسط موزون امید ریاضی شرطی X به شرط Y = y را در نظر گرفت، به قسمی که وزنی که به جملهٔ E[X|Y = y] نسبت می دهیم برابر احتمال پیشامدی باشد که این جمله روی آن شرطی شده است . (این مطلب چه چیز را به یاد شما می آورد؟) . این موضوع نتیجهٔ بسیار مهمی است که اغلب می توان میانگین را نخست با شرطی کردن آن روی یک متغیر تصادفی مناسب بسادگی حساب نمود.

مثال ۶ پ . یک معدنچی در معدنی که دارای سه راه خروجی است به دام افتاده است . خروجی نخست به تونلی منتهی می شود که پس از سه ساعت راه‌پیمایی نجات می یابد . خروجی دوم به تونلی منتهی می شود که پس از ۵ ساعت راهپیمایی او را به معدن برمی گرداند . خروجی سوم به تونلی منتهی می شود که پس از ۷ ساعت او را به معدن باز می گرداند . اگر فرض کنیم که معدنچی در تمام حالات با احتمال مساوی یکی از این خروجیها را انتخاب کند، میانگین طول زمان تا وقتی که نجات یابد چقدر است؟

حل : فرض کنید X نمایش مدت زمان (بر حسب ساعت) باشد تا زمانی که معدنچی نجات یابد و فرض کنید Y نمایش راه خروجی باشد که نخست انتخاب می کند؛ اکنون

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X|Y=1]P\{Y=1\} + E[X|Y=2]P\{Y=2\} \\ &\quad + E[X|Y=3]P\{Y=3\} \\ &= \tfrac{1}{3}(E[X|Y=1] + E[X|Y=2] + E[X|Y=3]) \end{aligned}$$

در صورتی که

$$\begin{aligned} E[X|Y=1] &= 3 \\ E[X|Y=2] &= 5 + E[X] \\ E[X|Y=3] &= 7 + E[X] \end{aligned} \qquad (۳-۶)$$

برای درك این که چرا معادلهٔ (۶-۳) درست است، مثلاً E[X|Y = 2] ، دلایل زیر را در نظر بگیرید : اگر معدنچی خروجی دوم را انتخاب کند پس از گذراندن ۵ ساعت در تونل دوباره به معدن برمی گردد . ولی زمانی که برمی گردد مسأله مانند قبل است ؛ از این رو میانگین زمان اضافی تا زمانی که نجات یابد درست همان E [X] است . بنابراین E[X|Y = 2] = 5 + E[X] . برای کمیتهای دیگر در معادلهٔ (۶-۳) استدلال مشابهی وجود دارد، بنابراین

$$E[X] = \tfrac{1}{3}(3 + 5 + E[X] + 7 + E[X])$$

یا

$$E[X] = 15$$

مثال ۶ ت . میانگین تعداد تصادفی از متغیرهای تصادفی. فرض کنید تعداد افرادی که به یک بخش فروشگاهی در روز معینی وارد می شوند یک متغیر تصادفی با میانگین ۵۰ باشد. به علاوه فرض کنید مقدار پولی که توسط این مشتریان هزینه می شود متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین مشترك ۸ تومان باشند. همچنین فرض کنید که مقدار پولی که توسط مشتریان هزینه می شود نیز از تعداد کل مشتریانی که وارد فروشگاه می شوند مستقل باشد. میانگین مقدار پولی که در یک روز معین در فروشگاه هزینه می شود چقدر است؟

حل : اگر فرض کنیم N نمایش تعداد مشتریانی باشد که وارد فروشگاه می شوند و X_i نمایش مبلغی باشد که توسط مشتری i ام هزینه شده، در این صورت مبلغ کل پول هزینه شده را می توان به صورت $\sum_{i=1}^{N} X_i$ بیان کرد. اکنون

$$E\left[\sum_{1}^{N} X_i\right] = E\left[E\left[\sum_{1}^{N} X_i | N\right]\right]$$

ولی

$$E\left[\sum_{1}^{N} X_i | N = n\right] = E\left[\sum_{1}^{n} X_i | N = n\right]$$

$$= E\left[\sum_{1}^{n} X_i\right] \qquad \text{بنابر استقلال } X_i \text{ و } N$$

$$= nE[X] \qquad \text{وقتی } E[X] = E[X_i]$$

و این ایجاب می کند که

$$E\left[\sum_{1}^{N} X_i | N\right] = NE[X]$$

لذا

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[NE[X]] = E[N]E[X]$$

بنابراین در این مثال میانگین مقدار پول هزینه شده در فروشگاه برابر ۴۰۰=۸ × ۵۰ است.

مثال ۶ ث. یک ظرف شامل a توپ سفید و b توپ سیاه است. هربار یک توپ بتصادف بیرون می آوریم تا زمانی که اولین توپ سفید به دست آید. میانگین تعداد توپهای سیاه بیرون آمده را بیابید.

حل : این مسأله قبلاً در مثال ۳ د بررسی شده است. در این جا حل آن را با شرطی کردن ارائه می دهیم. فرض می کنیم X نمایش تعداد توپهای سیاه بیرون آمده باشد و برای تأکید بر وابستگی a و b فرض می کنیم $M_{a,b} = E[X]$. با شرطی کردن روی اولین توپی که بیرون آمده عبارتی برای $M_{a,b}$ به دست می آوریم. یعنی، تعریف می کنیم

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{اگر توپ انتخابی سفید باشد} \\ 0 & \text{اگر توپ انتخابی سیاه باشد} \end{cases}$$

با شرطی کردن روی Y ، داریم

$$M_{a,b} = E[X] = E[X \mid Y = 1]P\{Y = 1\} + E[X \mid Y = 0]P\{Y = 0\}$$

در حالی که

$$E[X \mid Y = 1] = 0 \qquad (۶-۴)$$

$$E[X \mid Y = 0] = 1 + M_{a,b-1} \qquad (۶-۵)$$

برای پی بردن به مفهوم معادلات (۶-۴) و (۶-۵) برای مثال فرض کنید اولین توپ انتخابی سیاه است. در این صورت پس از انتخاب اول وضعیت دقیقاً همانند حالتی است که اگر با a توپ سفید و b - 1 توپ سیاه شروع می کردیم و این هم معادله (۶-۵) را ثابت می کند.

چون $P\{Y = 0\} = b/(a + b)$ ، دیده می شود که

$$M_{a,b} = \frac{b}{a+b}[1 + M_{a,b-1}]$$

اینک بوضوح $M_{a,0}$ برابر 0 است و داریم

$$M_{a,1} = \frac{1}{a+1}[1 + M_{a,0}] = \frac{1}{a+1}$$
$$M_{a,2} = \frac{2}{a+2}[1 + M_{a,1}] = \frac{2}{a+2}\left[1 + \frac{1}{a+1}\right] = \frac{2}{a+1}$$
$$M_{a,3} = \frac{3}{a+3}[1 + M_{a,2}] = \frac{3}{a+3}\left[1 + \frac{2}{a+1}\right] = \frac{3}{a+1}$$

با استفاده از استقراء بسادگی ثابت می شود که

$$M_{a,b} = \frac{b}{a+1}$$

کوواریانس یک متغیر تصادفی را نیز با شرطی کردن می توان به دست آورد. این مطلب را با مثال زیر شرح می دهیم.

مثال ۶ ج. کوواریانس توزیع هندسی. آزمایشهای مستقلی را که هریک با احتمال p منجر به موفقیت می شود بطور متوالی تکرار می کنیم. فرض کنید N زمان اولین موفقیت باشد. $E[N]$ را بیابید.

حل: فرض کنید اگر نتیجهٔ آزمایش نخست موفقیت باشد $Y = 1$ و در غیر این صورت $Y = 0$. اینک

$$\text{Var}(N) = E[N^2] - (E[N])^2$$

$E(N^2)$ را با شرطی کردن روی Y به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$E[N^2] = E[E[N^2 | Y]]$$

ولی

$$E[N^2 | Y = 1] = 1$$
$$E[N^2 | Y = 0] = E[(1 + N)^2]$$

این دو معادله نتیجه می شوند، زیرا اگر آزمایش نخست منجر به موفقیت شود در این صورت $N = 1$ و از این رو $N^2 = 1$. ازطرف دیگر، اگر نتیجه آزمایش اول شکست باشد. در این صورت توزیع تعدادکل آزمایشهای لازم برای موفقیت نخست همانند توزیع یک (آزمایش اولی که منجر به شکست شد)به علاوه تعدادآزمایشهای اضافی لازم می باشد. چون کمیت اخیر دارای

توزیعی همـــانندN است، $E\left[N^2|Y=0\right]=E\left[(1+N)^2\right]$ را به دست می آوریم . لذا دیده می شود

$$\begin{aligned}E[N^2] &= E[N^2 | Y = 1]P\{Y = 1\} + E[N^2 | Y = 0]P\{Y = 0\}\\ &= p + (1-p)E[(1+N)^2]\\ &= 1 + (1-p)E[2N + N^2]\end{aligned}$$

لیکن همان طور که در مثال ۱ ث نشان دادیم، $E[N]=\frac{1}{p}$ و لذا از این جا نتیجه می شود

$$E[N^2] = 1 + \frac{2(1-p)}{p} + (1-p)E[N^2]$$

یا

$$E[N^2] = \frac{2-p}{p^2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(N) &= E[N^2] - (E[N])^2\\ &= \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2\\ &= \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

۶-۳ محاسبه احتمالات با شرطی کردن

نه تنها میانگینها را می توان نخست با شرطی کردن روی یک متغیر تصادفی خاص به دست آورد، بلکه با استفاده از این روش احتمالات را نیز می توان محاسبه نمود. برای نشان دادن این مطلب، فرض می کنیم E یک پیشامد دلخواه باشد و متغیر تصادفی نشانگر X را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر } E \text{ رخ دهد} \\ 0 & \text{اگر } E \text{ رخ ندهد} \end{cases}$$

از تعریف X نتیجه می شود که

$$\begin{aligned}E[X] &= P(E)\\ E[X | Y = y] &= P(E | Y = y)\end{aligned}$$

بنابراین، از معادلات (۵-۱ الف) و (۵-۱ ب) نتیجه می شود

$$P(E) = \sum_{y} P(E \mid Y = y)P(Y = y) \qquad \text{گسسته باشد } Y$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(E \mid Y = y) f_Y(y)\, dy \qquad \text{پیوسته باشد } Y \tag{۶-۶}$$

توجه کنید اگر Y یک متغیر تصادفی گسسته باشد که یکی از مقادیر $y_1, \ldots, y_2$ را اختیار می کند، در این صورت پیشامد F_i، $i = 1, \ldots, n$، را با $F_i = \{Y = y_i\}$ تعریف می کنیم. معادلهٔ (۶-۶) به معادلهٔ مشهور زیر تبدیل می گردد.

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E \mid F_i)P(F_i)$$

که در آن F_1 ، . . . ، F_n پیشامدهای متقابلاً نا سازگاری هستند که اجتماع آنها فضای نمونه است.

مثال ۶ ج. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل باشند و چگالی آنها به ترتیب f_x و f_y باشد. $P\{X < Y\}$ را حساب کنید.

حل: با شرطی کردن روی مقادیر Y داریم

$$P\{X < Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\{X < Y \mid Y = y\} f_Y(y)\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X < y \mid Y = y\} f_Y(y)\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X < y\} f_Y(y)\, dy \qquad \text{بنابر استقلال}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y)\, dy$$

که در آن

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(x)\, dx$$

مثال ۶ ح: فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل باشند. توزیع X + Y را بیابید.

حل : با شرطی کردن روی مقادیر Y، داریم

$$\begin{aligned} P\{X+Y<a\} &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X+Y<a \mid Y=y\} f_Y(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X+y<a \mid Y=y\} f_Y(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X<a-y\} f_Y(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y)\, dy \end{aligned}$$

۶-۴ واریانس شرطی

همان طور که میانگین شرطی X را با مقادیر معلوم Y تعریف کردیم می توانیم واریانس شرطی X با فرض $Y = y$ را نیز به صورت زیر تعریف کنیم :

$$\mathrm{Var}(X \mid Y) = E[[X - E(X \mid Y)]^2 \mid Y]$$

یعنی ، $\mathrm{Var}(X|Y)$ برابر است با میانگین (شرطی) مربع تفاضل بین X و میانگین (شرطی) آن وقتی مقدار Y مفروض است . به عبارت دیگر، $V(X \mid Y)$ دقیقاً مشابه تعریف معمولی واریانس است، لیکن اکنون تمام میانگینها نسبت به این که Y مفروض است شرطی می باشند .

رابطهٔ بسیار مفیدی بین $\mathrm{Var}(X)$ ، واریانس غیر شرطی X و $\mathrm{Var}(X|Y)$ ، واریانس شرطی X با فرض Y وجودداردکه اغلب می توان آن را برای محاسبهٔ $\mathrm{Var}(X)$ به کار برد . برای به دست آوردن این رابطه نخست توجه کنید که با همان دلیلی که $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ نتیجه می شود .

$$\mathrm{Var}(X \mid Y) = E[X^2 \mid Y] - (E[X \mid Y])^2$$

و بنابر این

$$\begin{aligned} E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] &= E[E[X^2 \mid Y]] - E[(E[X \mid Y])^2] \\ &= E[X^2] - E[(E[X \mid Y])^2] \end{aligned} \qquad (۶-۷)$$

چون $E[E[X|Y]] = E[X]$ ، همچنین داریم

$$\text{Var}(E[X \mid Y]) = E[(E[X \mid Y])^2] - (E[X])^2 \qquad (۶-۸)$$

بنابراین با جمع کردن معادلات (۶-۷) و (۶-۸) حکم زیر به دست می آید.

حکم ۶-۲ فرمول واریانس شرطی

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X \mid Y)] + \text{Var}(E[X \mid Y])$$

مثال ۶ غ. فرض کنید در هر زمان t تعداد افرادی که به ایستگاه قطار وارد می شوند یک متغیر تصادفی پواسن با میانگین λ t باشد. اگر اولین قطار در زمانی (مستقل از زمان ورود مسافران) که دارای توزیع یکنواخت روی (0 ، T) است به ایستگاه وارد شود، میانگین و واریانس تعداد مسافرانی که سوار قطار می شوند چقدر است؟

حل : فرض کنید، برای هر $t \geq 0$ ، $N(t)$ نمایش تعداد ورودیها تا t باشد و فرض کنید Y نمایش زمانی که قطار وارد می شود باشد. در این صورت متغیر تصادفی مورد نظر $N(Y)$ است. با شرطی کردن روی Y داریم

$$\begin{aligned} E[N(Y) \mid Y = t] &= E[N(t) \mid Y = t] \\ &= E[N(t)] && \text{بنابر استقلال } Y \text{ و } N(t) \\ &= \lambda t && \text{زیرا } N(t) \text{ پواسون با میانگین } \lambda t \text{ است} \end{aligned}$$

بنابراین

$$E[N(Y) \mid Y] = \lambda Y$$

و لذا با محاسبه میانگین داریم

$$E[N(Y)] = \lambda E[Y] = \frac{\lambda T}{2}$$

برای به دست آوردن $\text{Var}(N(Y))$ از فرمول واریانس شرطی استفاده می کنیم :

$$\begin{aligned} \text{Var}(N(Y) \mid Y = t) &= \text{Var}(N(t) \mid Y = t) \\ &= \text{Var}(N(t)) && \text{بنابر استقلال} \\ &= \lambda t \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(N(Y)|Y) &= \lambda Y\\ E[N(Y)|Y] &= \lambda Y\end{aligned}$$

لذا، از فرمول واریانس شرطی نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(N(Y)) &= E[\lambda Y] + \mathrm{Var}(\lambda Y)\\ &= \lambda \frac{T}{2} + \lambda^2 \frac{T^2}{12}\end{aligned}$$

که در آن $\mathrm{Var}(Y) = \frac{T^2}{12}$ را به کار می‌بریم.

مثال ۶ د. واریانس تعداد تصادفی از متغیرهای تصادفی. فرض کنید X_1 ، X_2 ، . . . ، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی همتوزیع و مستقل باشد و فرض کنید N یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح نا منفی باشد که از دنباله X_i، $i \geq 1$ ، مستقل است. برای محاسبه $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$ ، با شرطی کردن روی N داریم.

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N\right] = NE[X]$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i | N\right) = N\,\mathrm{Var}(X)$$

چون برای N معلوم $\sum_{i=1}^{N} X_i$ تنها مجموع تعداد ثابتی از متغیرهای تصادفی مستقل است و بنابراین میانگین و واریانس آن همان مجموع میانگینها و واریانسهای تکی است، لذا نتایج فوق حاصل می گردد. بنابراین، با استفاده از فرمول واریانس شرطی داریم

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\,\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2\,\mathrm{Var}(N)$$

۷ - میانگین شرطی و پیشگویی

گاهی حالتی به‌وجود می‌آید که بر مبنای مقدار مشاهده شده متغیر تصادفی X مبادرت به پیشگویی کردن مقدار متغیرتصادفی دوم، Y ، می کنیم. فرض کنید $g(x)$ نمایش پیشگویی کننده باشد؛ یعنی اگر مقدارمشاهده شده X برابر x باشددر این صورت $g(x)$ پیشگویی مابرای مقدار Y

است. بطور کلی، می خواهیم g را چنان انتخاب کنیم که g (X) نزدیک به y باشد. یک معیار ممکن برای نزدیکی آن است که g راچنان انتخاب کنیم که $E[(Y - g(X))^2]$ را مینیمم کند. اکنون با این معیار نشان می دهیم که $g(X) = E[Y|X]$ بهترین پیشگویی کننده ممکن برای Y می باشد.

حکم ۷-۱

$$E[(Y-g(X))^2] \geq E[(Y-E[Y|X])^2]$$

برهان :

$$\begin{aligned} E[(Y-g(X))^2|X] &= E[(Y-E[Y|X]+E[Y|X]-g(X))^2|X] \\ &= E[(Y-E[Y|X])^2|X] \\ &\quad + E[(E[Y|X]-g(X))^2|X] \\ &\quad + 2E[(Y-E[Y|X])(E[Y|X]-g(X))|X] \end{aligned} \quad (۱-۷)$$

ولی با معلوم بودن X، $E[Y|X] - g(X)$ تابعی از X می باشد که می توان آن را به عنوان یک ثابت در نظر گرفت، بنابراین

$$\begin{aligned} &E[(Y-E[Y|X])(E[Y|X]-g(X))|X] \\ &= (E[Y|X]-g(X))E[Y-E[Y|X]|X] \\ &= (E[Y|X]-g(X))(E[Y|X]-E[Y|X]) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (۲-۷)$$

از این رو از معادله (۷ - ۱) و (۷ - ۲) ، داریم

$$E[(Y-g(X))^2|X] \geq E[(Y-E[Y|X])^2|X]$$

و با محاسبهٔ میانگین از هردو طرف نا مساوی فوق نتیجه به دست می آید.

تبصره : اثبات دومی هرچند با دقت کمتر و شهودی تر از حکم ۷-۱ به صورت زیر است. براحتی می توان ثابت کرد که $E[(X-C)^2]$ در $C = E[Y]$ مینیمم می شود. (تمرین نظری ۵ را ملاحظه کنید). از این رو، بهترین پیشگویی ممکن بدین منظور که میانگین مربع خطا را مینیمم کند، آن است که پیشگویی کنیم که Y برابر میانگین خودش باشد. از طرف دیگر

اگر مقدار مشاهده شدهٔ متغیر تصادفی X برابر x باشد، در این صورت مساله پیشگویی دقیقاً همانند حالت قبل (بدون داده) باقی می ماند، با این استثناء که اکنون تمام احتمالات و میانگینها نسبت به پیشامد X = x شرطی می باشند. بنابراین نتیجه می شود که بهترین پیشگویی در این حالت عبارت است از این که Y برابر میانگین شرطی خود به شرط X = x باشد، از این رو حکم ۷-۱ ثابت می گردد.

مثال ۷الف. فرض کنید پسر مردی با طول قد x (برحسب اینچ) به طول قدی نایل می گردد که دارای توزیع نرمال با میانگین x + 1 و واریانس ۴ می باشد. بهترین پیشگویی طول قد پسر مردی با قد ۶ پا در زمان رشد کامل چقدر است؟

حل: این الگو را رسماً می توان به صورت زیر نوشت.

$$Y = X + 1 + e$$

که در آن e یک متغیر تصادفی نرمال مستقل از X با میانگین 0 و واریانس۴ می باشد. البته X و Y به ترتیب طول قد مرد و پسرش را نشان می دهند. از این روبهترین پیشگویی $E[Y|X = 72]$ برابر است با

$$\begin{aligned} E[Y|X = 72] &= E[X + 1 + e|X = 72] \\ &= 73 + E[e|X = 72] \\ &= 73 + E(e) \qquad \text{بنابر استقلال} \\ &= 73 \end{aligned}$$

مثال ۷ ب. فرض کنید مقدار علامت s از محل A ارسال شده باشد، در این صورت مقدار علامت دریافت شده در محل B دارای توزیع نرمال با پارامترهای (s , 1) است. اگر S مقدار علامت ارسال شده در A دارای توزیع نرمال با پارامترهای (μ , σ^2) باشد و اگر R مقدار علامت دریافت شده در B برابر r باشد «بهترین» برآورد علامت ارسال شده چقدر است؟

حل: نخست چگالی شرطی S به شرط R را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} f_{S|R}(s|r) &= \frac{f_{S,R}(s, r)}{f_R(r)} \\ &= \frac{f_S(s) f_{R|S}(r|s)}{f_R(r)} \\ &= K e^{-(s-\mu)^2/2\sigma^2} e^{-(r-s)^2/2} \end{aligned}$$

وقتی K بستگی به s ندارد. اکنون

$$\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}+\frac{(r-s)^2}{2}=s^2\left(\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\mu}{\sigma^2}+r\right)s+C_1$$
$$=\frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2}\left[s^2-2\left(\frac{\mu+r\sigma^2}{1+\sigma^2}\right)s\right]+C_1$$
$$=\frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2}\left(s-\frac{(\mu+r\sigma^2)}{1+\sigma^2}\right)^2+C_2$$

که در آن C_1 و C_2 بستگی به s ندارند. لذا

$$f_{S|R}(s|r)=C\exp\left\{\frac{-\left[s-\frac{(\mu+r\sigma^2)}{1+\sigma^2}\right]^2}{2\left(\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}\right)}\right\}$$

که در آن C به s بستگی ندارد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که توزیع شرطی علامت ارسال شده S به شرط آن که r دریافت شده باشد نرمال است که میانگین و واریانس آن به صورت زیر می باشد

$$E[S|R=r]=\frac{\mu+r\sigma^2}{1+\sigma^2}$$
$$\text{Var}(S|R=r)=\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}$$

بنابراین، بهترین برآورد به منظور مینیمم کردن میانگین مربع خطا برای علامت ارسال شده به فرض آن که مقدار دریافت شده r باشد، بنابر حکم ۷-۱ عبارت است از

$$E[S|R=r]=\frac{1}{1+\sigma^2}\mu+\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}r$$

نوشته شدن میانگین شرطی به صورت فوق بیانگر این است که مقدار آن با متوسط موزون μ میانگین پیشین علامت و r مقدار دریافتی برابر است. نسبت وزنهای نسبی منسوب به μ و r^2 به یکدیگر مانند نسبت 1 (واریانس شرطی علامت دریافتی وقتی s ارسال شده باشد) به σ^2 (واریانس علامتی که باید ارسال شود) می باشد.

مثال ۷ پ. در فرآیند علامت رقمی، داده های مشابه پیوسته خام X را برای به دست آوردن نمایش رقمی باید کمیت دار یا گسسته نمود. یک مجموعهٔ صعودی از اعداد a_i ،

$i = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ به قسمتی که $\lim_{i \to -\infty} a_i = -\infty$ و $\lim_{i \to +\infty} a_i = \infty$ ثابت باشند را در نظر گرفته و داده های خام را برحسب فاصله های (a_i, a_{i+1}) که X در آن قرار دارد . کمیت دار می کنیم ، فرض کنید وقتی $X \varepsilon (a_i, a_i + 1)$ مقدار گسسته آن y_i باشد و فرض کنید Y نمایش مقدار گسستهٔ مشاهده شده باشد ـ یعنی ،

$$Y = y_i \qquad \text{if } a_i < X \leq a_{i+1}$$

توزیع Y به صورت زیر است

$$P\{Y = y_i\} = F_X(a_{i+1}) - F_X(a_i)$$

اکنون فرض کنید بخواهیم $E[(X - Y)^2]$ ، میانگین مربع تفاضل بین داده های خام و حالت کمیت دار شدهٔ آنها را با انتخاب مقادیر y_i ، $i = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ مینیمم نماییم .

(الف) مقادیر بهینه y_i ، $i = 0, \pm 1, ...$ را بیابید .

برای کمیت سنج بهینهٔ Y نشان دهید که

(ب) $E[Y] = E[X]$ و همچنین میانگین مربع خطای کمیت دار شده میانگین ورودی را حفظ می کند، و

(ج) $\text{Var}(Y) = \text{Var}(X) - E[(X - Y)^2]$

حل : (الف) برای هر کمیت سنج Y ، با شرطی کردن روی مقدار Y داریم

$$E[(X - Y)^2] = \sum_i E[(X - y_i)^2 | a_i < X \leq a_{i+1}] P\{a_i < X \leq a_{i+1}\}$$

اکنون اگر فرض کنیم که

$$I = i \qquad \text{if } a_i < X \leq a_{i+1}$$

در این صورت

$$E[(X - y_i)^2 | a_i < X \leq a_{i+1}] = E[(X - y_i)^2 | I = i]$$

و این کمیت بنابر حکم ۷-۱ وقتی مینیمم می شود که

$$\begin{aligned} y_i &= E[X | I = i] \\ &= E[X | a_i < X \leq a_{i+1}] \\ &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{x f_X(x)\, dx}{F_X(a_{i+1}) - F_X(a_i)} \end{aligned}$$

اینک، چون کمیت سنج بهینه به صورت $Y = E[X|I]$ است، نتیجه می شود که

(ب)
$$E[Y] = E[X]$$

(ج)
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E[\mathrm{Var}(X|I)] + \mathrm{Var}(E[X|I]) \\ &= E[E[(X-Y)^2|I]] + \mathrm{Var}(Y) \\ &= E[(X-Y)^2] + \mathrm{Var}(Y)\end{aligned}$$

گاهی اتفاق می افتد که توزیع احتمال مشترك X و Y کاملاً معلوم نیست؛ یا اگر معلوم است به قسمی است که محاسبه $E[Y|X = x]$ از نظر ریاضی انجام نشدنی است. لیکن اگر میانگین و واریانس X و Y و همبستگی X , Y معلوم باشند در این صورت حداقل می توان بهترین برآوردگر خطی Y نسبت به X را تعیین کرد.

برای تعیین بهترین برآوردگر خطی Y نسبت به X لازم است a , b را چنان انتخاب کنیم تا $E[(Y - (a+bX))^2]$ مینیمم شود. اکنون

$$\begin{aligned}E[(Y-(a+bX))^2] &= E[Y^2 - 2aY - 2bXY + a^2 + 2abX + b^2X^2] \\ &= E[Y^2] - 2aE[Y] - 2bE[XY] + a^2 \\ &\quad + 2abE[X] + b^2E[X^2]\end{aligned}$$

با مشتق گیری جزیی داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}E[(Y-a-bX)^2] &= -2E[Y] + 2a + 2bE[X] \\ \frac{\partial}{\partial b}E[(Y-a-bX)^2] &= -2E[XY] + 2aE[X] + 2bE[X^2]\end{aligned} \qquad (۷-۳)$$

با مساوی 0 قرار دادن معادلات (۷-۳) و حل آن نسبت به a و b جوابهای زیر به دست می آید

$$b = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{E[X^2] - (E[X])^2} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_x^2} = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$a = E[Y] - bE[X] = E[Y] - \frac{\rho\sigma_y E[X]}{\sigma_x} \qquad (۷-۴)$$

که در آن ضریب همبستگی$\rho = (X, Y)$ ، $\sigma_y^2 = \mathrm{Var}(Y)$ و $\sigma_x^2 = \mathrm{Var}(X)$. بسادگی ثابت می شود که مقادیر a و b از معادله (۷-۴) مقدار $E[(Y - a - bX)^2]$ را مینیمم می کند، و بنابراین به مفهوم میانگین مربع خطا بهترین برآوردگر خطی Y نسبت به X

عبارت است از

$$\mu_y + \frac{\rho\sigma_y}{\sigma_x}(X - \mu_x)$$

که در آن $\mu_y = E[Y]$ و $\mu_x = E[X]$.

میانگین مربع خطای این پیشگویی کننده عبارت است از

$$\begin{aligned} E\left[\left(Y - \mu_y - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \mu_x)\right)^2\right] \\ &= E[(Y-\mu_y)^2] + \rho^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}E[(X-\mu_x)^2] - 2\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}E[(Y-\mu_y)(X-\mu_x)] \qquad (۵-۷) \\ &= \sigma_y^2 + \rho^2\sigma_y^2 - 2\rho^2\sigma_y^2 \\ &= \sigma_y^2(1-\rho^2) \end{aligned}$$

توجه کنید که بنابر معادلهٔ (۷-۵) اگر مقدار ρ نزدیک به ۱+ یا ۱- باشد ، دراین صورت میانگین مربع خطای بهترین پیشگویی کنندهٔ خطی نزدیک به 0 است .

مثال ۷ ت. یک مثال که در آن میانگین شرطی Y به شرط X نسبت به X خطی باشد، و از این رو بهترین پیشگویی کننده خطی Y که نسبت به X روی هم رفته بهترین پیشگویی کننده باشد، آن است که X و Y توزیع نرمال دو متغیره داشته باشند. در این حالت چگالی مشترك آنها به صورت زیر است

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

اثبات این مطلب را که چگالی شرطیYبه شرط $X = x$ به صورت زیر است به خواننده واگذار می کنیم.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\left(y - \mu_y - \frac{\rho\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)\right)^2\right\}$$

بنابراین توزیع شرطی Y به شرط $X = x$ توزیع نرمال با میانگین

$$E[Y \mid X = x] = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$$

و واریانس $\sigma_y^2(1-\rho^2)$ می‌باشد.

۸- تابع مولد گشتاور

$\phi(t)$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X برای تمام مقادیر حقیقی t به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi(t) = E[e^{tX}]$$
$$= \begin{cases} \sum_x e^{tx}p(x) & \text{گسسته با تابع جرم } p(x) \text{ باشد } X \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)\,dx & \text{پیوسته با چگالی } f(x) \text{ باشد } X \end{cases}$$

$\phi(t)$ را تابع مولد گشتاور می‌نامیم زیرا با مشتق گیری متوالی $\phi(t)$ و محاسبهٔ نتیجه در $t = 0$ می‌توان تمام گشتاورهای X را به‌دست آورد. برای مثال

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \frac{d}{dt}E[e^{tX}] \\ &= E\left[\frac{d}{dt}(e^{tX})\right] \\ &= E[Xe^{tX}]\end{aligned} \tag{۱-۸}$$

که در آن فرض کرده‌ایم تعویض عملگرهای مشتق و میانگین جایز است؛ یعنی در حالت گسسته فرض کرده‌ایم که

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_x e^{tx}p(x)\right] = \sum_x \frac{d}{dt}[e^{tx}p(x)]$$

و در حالت پیوسته فرض کرده‌ایم که

$$\frac{d}{dt}\left[\int e^{tx}f(x)\,dx\right] = \int \frac{d}{dt}[e^{tx}f(x)]\,dx$$

این فرض تقریباً همواره می‌تواند مورد تائید باشد و در حقیقت برای تمام توزیعهای مورد مطالعه در این کتاب بر قرار است. از این رو، بنابر، معادلهٔ (۸-۱)، با محاسبهٔ آن در $t = 0$ داریم

$$\phi'(0) = E[X]$$

بطور مشابه

$$\begin{aligned}\phi''(t) &= \frac{d}{dt}\phi'(t)\\ &= \frac{d}{dt}E[Xe^{tX}]\\ &= E\left[\frac{d}{dt}(Xe^{tX})\right]\\ &= E[X^2e^{tX}]\end{aligned}$$

بنابراین

$$\phi''(0) = E[X^2]$$

بطور کلی مشتق n ام، $\phi(t)$ عبارت است از

$$\phi^n(t) = E[X^n e^{tX}] \qquad n \geq 1$$

ایجاب می کند که

$$\phi^n(0) = E[X^n] \qquad n \geq 1$$

اینک $\phi(t)$ را برای بعضی توزیعهای معمولی پیدا می کنیم .

مثال ۸ الف . توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p . اگر X متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n و p باشد، در این صورت

$$\begin{aligned}\phi(t) &= E[e^{tX}]\\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^t)^k(1-p)^{n-k}\\ &= (pe^t+1-p)^n\end{aligned}$$

که در آن آخرین تساوی از قضیهٔ دو جمله‌ای حاصل می گردد .

$$\phi'(t) = n(pe^t+1-p)^{n-1}pe^t$$

و بنابر این

$$E[X] = \phi'(0) = np$$

که با نتیجه ای که نخست در مثال ۱ث حاصل شد مطابقت می نماید. با مشتق گیری مرتبهٔ دوم حاصل می شود

$$\phi''(t) = n(n-1)(pe^t + 1 - p)^{n-2}(pe^t)^2 + n(pe^t + 1 - p)^{n-1}pe^t$$

و بنابراین

$$E[X^2] = \phi''(0) = n(n-1)p^2 + np$$

واریانس X به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

که نتیجه مثال ۵ الف را ثابت می کند.

مثال ۸ ب. توزیع پواسن با میانگین λ. اگر X متغیر تصادفی پواسن با میانگین λ باشد، آن گاه

$$\begin{aligned} \phi(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{tn}e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} \\ &= \exp\{\lambda(e^t - 1)\} \end{aligned}$$

با مشتق گیری حاصل می شود

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \lambda e^t \exp\{\lambda(e^t - 1)\} \\ \phi''(t) &= (\lambda e^t)^2 \exp\{\lambda(e^t - 1)\} + \lambda e^t \exp\{\lambda(e^t - 1)\} \end{aligned}$$

و بنابراین

$$E[X] = \phi'(0) = \lambda$$
$$E[X^2] = \phi''(0) = \lambda^2 + \lambda$$
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \lambda\end{aligned}$$

بنابراین میانگین و واریانس متغیر تصادفی پواسن هردو برابر λ می باشند.

مثال ۸ پ. توزیع نمایی با پارامتر λ .

$$\begin{aligned}\phi(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda-t)x}\,dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad \text{for } t < \lambda\end{aligned}$$

از این نتیجه متوجه می شویم که برای توزیع نمایی ، $\phi(t)$ تنها برای مقادیر t کوچکتر از λ تعریف می شود. با مشتق گیری از $\phi(t)$ نتیجه می شود

$$\phi'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \qquad \phi''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

بنابراین

$$E[X] = \phi'(0) = \frac{1}{\lambda} \qquad E[X^2] = \phi''(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

و واریانس X به صورت زیر محاسبه می شود

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

مثال ۸ ت. توزیع نرمال. ابتدا تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی نرمال واحد با پارامترهای 0 و ۱ را حساب می کنیم . فرض کنید Z چنین متغیر تصادفی باشد، داریم

$$
\begin{aligned}
\phi_Z(t) &= E[e^{tZ}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-x^2/2}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(x^2 - 2tx)}{2} \right\} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2} \right\} dx \\
&= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2/2}\, dx \\
&= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy \qquad \text{با جانشین کردن} \quad y = x - t \\
&= e^{t^2/2}
\end{aligned}
$$

بنابراین تابع مولد گشتاور Z متیغر تصادفی نرمال واحد برابر است با $\phi_Z(t) = e^{t^2/2}$.
برای محاسبهٔ تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی نرمال دلخواه خاطرنشان می کنیم (بخش ۳ فصل ۵ را ببینید) که $X = \mu + \sigma Z$ در صورتی که Z متغیر تصادفی نرمال واحد باشد دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ , σ^2 است. بنابراین تابع مولد گشتاور این متغیر تصادفی عبارت است از

$$
\begin{aligned}
\phi_X(t) &= E[e^{tX}] \\
&= E[e^{t(\mu+\sigma Z)}] \\
&= E[e^{t\mu} e^{t\sigma Z}] \\
&= e^{t\mu} E[e^{t\sigma Z}] \\
&= e^{t\mu} \phi_Z(t\sigma) \\
&= e^{t\mu} e^{(t\sigma)^2/2} \\
&= \exp\left\{ \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t \right\}
\end{aligned}
$$

با مشتق گیری، داریم

$$
\phi'_X(t) = (\mu + t\sigma^2) \exp\left\{ \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t \right\}
$$

$$
\phi''_X(t) = (\mu + t\sigma^2)^2 \exp\left\{ \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t \right\} + \sigma^2 \exp\left\{ \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t \right\}
$$

و بنابراین

$$E[X] = \phi'(0) = \mu$$
$$E[X^2] = \phi''(0) = \mu^2 + \sigma^2$$

و لذا داریم

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= E[X^2] - E([X])^2 \\ &= \sigma^2\end{aligned}$$

جدولهای ۷-۱ و ۷-۲ تابع مولد گشتاور برای چند توزیع گسسته و پیوستهٔ معمولی را می دهند.

یک خاصیت مهم توابع مولد گشتاور آن است که تابع مولد گشتاور مجموع متغیرهای تصادفی مستقل برابر با حاصل ضرب تابع مولد گشتاور آنها می باشد. برای اثبات این مطلب، فرض کنید X و Y مستقلند و به ترتیب دارای تابع مولد گشتاور $\phi_X(t)$ و $\phi_Y(t)$ می باشند. در این صورت، $\phi_{X+Y}(t)$ تابع مولد گشتاور X + Y عبارت است از

$$\begin{aligned}\phi_{X+Y}(t) &= E[e^{t(X+Y)}] \\ &= E[e^{tX}e^{tY}] \\ &= E[e^{tX}]E[e^{tY}] \\ &= \phi_X(t)\phi_Y(t)\end{aligned}$$

که در آن تساوی ما قبل آخر از حکم ۵-۱ نتیجه می شود، چون X و Y مستقلند.

نتیجهٔ مهم دیگر آن است که تابع مولد گشتاور، توزیع را بطور منحصر به فرد تعیین می کند. یعنی، اگر $\phi(t)$ وجود داشته و در ناحیه ای حول 0 معین باشد در این صورت توزیع X بطور منحصر به فرد تعیین می گردد. مثلاً، اگر $\phi_X(t)\left(\frac{1}{2}\right)^{10}(e^t+1)^{10}$ در این صورت از جدول ۷-۱ نتیجه می شود که X متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای ۱۰ و $\frac{۱}{۲}$ می باشد.

مثال ۸ ث. فرض کنید تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X عبارت است از $\phi(t) = e^{3(e^t-1)}$. $P\{X=0\}$ چقدر است؟

حل: از جدول ۷-۱ دیده می شود که $\phi(t) = e^{3(e^t-1)}$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی پواسن با میانگین ۳ می باشد. در نتیجه، بنابر تناظر یک به یک بین توابع مولد گشتاور و توابع توزیع، نتیجه می شود که X بایستی متغیر تصادفی پواسن با میانگین ۳ باشد. از این رو $P\{X=0\} = e^{-3}$.

جدول ۷-۱

توزیع احتمال گسسته	تابع جرم احتمال، $P(x)$	تابع مولد گشتاور، $\phi(t)$	میانگین	واریانس
دوجمله ای با پارامترهای n و p، $0 \le p \le 1$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$، $x = 0, 1, \ldots, n$	$(pe^t + 1 - p)^n$	np	$np(1-p)$
پواسن با پارامتر $\lambda > 0$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$، $x = 0, 1, 2, \ldots$	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$	λ	λ
هندسی با پارامتر $0 \le p \le 1$	$p(1-p)^{x-1}$، $x = 1, 2, \ldots$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
دوجمله ای منفی با پارامترهای r و p، $0 \le p \le 1$	$\binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$، $n = r, r+1, \ldots$	$\left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$

جدول ۷-۲

توزیع احتمال گسسته	تابع چگالی احتمال $f(x)$	تابع مولد گشتاور $\phi(t)$	میانگین	واریانس
یکنواخت روی (a, b)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
نمایی با پارامتر $\lambda > 0$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
گاما با پارامترهای (s, λ) $\lambda > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{s-1}}{\Gamma(s)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^s$	$\frac{s}{\lambda}$	$\frac{s}{\lambda^2}$
نرمال با پارامترهای (μ, σ^2)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < x < \infty$	$\exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$	μ	σ^2

مثال ۸ ج . مجموع متغیرهای تصادفی دو جمله ای مستقل . اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با پارامترهای (n , p) و (m , p) باشند، توزیع X + Y چیست ؟

حل : تابع مولد گشتاور X + Y برابر است با

$$\begin{aligned}\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) &= (pe^t + 1 - p)^n(pe^t + 1 - p)^m \\ &= (pe^t + 1 - p)^{m+n}\end{aligned}$$

لیکن ، $(pe^t + 1-p)^{m+n}$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای m + n و p می باشد . از این رو X + Y باید دارای این توزیع باشد .

مثال ۸ چ . مجموع متغیرهای تصادفی پواسن مستقل . توزیع X + Y را بیابید وقتی X و Y متغیرهای تصادفی پواسن مستقل به ترتیب با میانگین λ_1 ، λ_2 می باشند .

حل :

$$\begin{aligned}\phi_{X+Y}(t) &= \phi_X(t)\phi_Y(t) \\ &= \exp\{\lambda_1(e^t - 1)\}\exp\{\lambda_2(e^t - 1)\} \\ &= \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1)\}\end{aligned}$$

بنابراین X + Y دارای توزیع پواسن با میانگین $\lambda_1 + \lambda_2$ است، نتیجه حاصل در مثال ۳ پ فصل ۶ را ثابت می کند .

مثال ۸ ح . مجموع متغیرهای تصادفی نرمال مستقل. نشان دهید اگر X و Y متغیرهای تصادفی نرمال مستقل و پارامترهای آنها به ترتیب (μ_1, σ^2_1) و (μ_2, σ^2_2) باشند، در این صورت X + Y نرمال با میانگین $\mu_1 + \mu_2$ و واریانس $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ می باشد .

حل :

$$\begin{aligned}\phi_{X+Y}(t) &= \phi_X(t)\phi_Y(t) \\ &= \exp\left\{\frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + \mu_1 t\right\}\exp\left\{\frac{\sigma_2^2 t^2}{2} + \mu_2 t\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2} + (\mu_1 + \mu_2)t\right\}\end{aligned}$$

که تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی نرمال با میانگین $\mu_1 + \mu_2$ و واریانس $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ می باشد . از این رو نتیجه حاصل می گردد زیرا تابع مولد گشتاور بطور منحصر به فرد توزیع را

مشخص می کند .

مثال ۸ ع . تابع مولدگشتاورمجموع تعداد تصادفی از متغیرهای تصادفی . فرض کنید X_1 ، X_2 ، . . . دنباله ای از متغیرهای تصادفی همتوزیع و مستقل باشد، و فرض کنید N یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح و نا منفی باشد که از دنبالهٔ X_i ، $i \geq 1$ ، مستقل است . می خواهیم تابع مولد گشتاور مجموع زیر را حساب کنیم

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

(در مثال ۶ ت Y نمایش مبلغ پول هزینه شده در یک فروشگاه در یک روز معین بود، وقتی مبلغ هزینه شده توسط یک مشتری و تعداد این مشتریها هردو متغیر تصادفی اند) .

برای محاسبه تابع مولد گشتاور Y ، ابتدا روی N به صورت زیر شرطی می کنیم

$$\begin{aligned} E[e^{t\Sigma_1^N X_i}|N=n] &= E[e^{t\Sigma_1^n X_i}|N=n] \\ &= E[e^{t\Sigma_1^n X_i}] \\ &= (\phi_X(t))^n \end{aligned}$$

که درآن

$$\phi_X(t) = E[e^{tX_i}]$$

بنابراین

$$E[e^{tY}|N] = (\phi_X(t))^N$$

و از این رو

$$\phi_Y(t) = E[(\phi_X(t))^N]$$

اکنون گشتاورهای Y را با مشتق گیری به صورت زیر می توان به دست آورد :

$$\phi'_Y(t) = E[N(\phi_X(t))^{N-1}\phi'_X(t)]$$

و بنابر این

$$\begin{aligned} E[Y] &= \phi'_Y(0) \\ &= E[N(\phi_X(0))^{N-1}\phi'_X(0)] \\ &= E[NEX] \\ &= E[N]E[X] \end{aligned} \qquad (۸-۲)$$

که نتیجه مثال ۶ ت را ثابت می کند. (در این مجموعه معادلات اخیر از این حقیقت که $\phi_X(0) = E[e^{0X}] = 1$ استفاده نموده ایم.) همچنین،

$$\phi''_Y(t) = E[N(N-1)(\phi_X(t))^{N-2}(\phi'_X(t))^2 + N(\phi_X(t))^{N-1}\phi''_X(t)]$$

و بنابر این

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= \phi''_Y(0) \\ &= E[N(N-1)(E[X])^2 + NE[X^2]] \\ &= (E[X])^2(E[N^2] - E[N]) + E[N]E[X^2] \\ &= E[N](E[X^2] - (E[X])^2) + (E[X])^2E[N^2] \\ &= E[N]\,\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2E[N^2] \end{aligned} \qquad (۸-۳)$$

بنابراین از معادلات (۸-۲) و (۸-۳) دیده می شود که

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= E[N]\,\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2(E[N^2] - (E[N])^2) \\ &= E[N]\,\mathrm{Var}(X) + (E[X])^2\,\mathrm{Var}(N) \end{aligned}$$

همچنین ممکن است تابع مولد گشتاور توأم دو متغیر تصادفی یا بیشتر را تعریف نمود. این کار را به صورت زیر انجام می دهیم. برای هر n متغیر تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ تابع مولد گشتاور توأم $\phi(t_1,\ldots,t_n)$ را برای تمام مقادیر حقیقی t_1 ، . . . ، t_n ، به صورت

$$\phi(t_1,\ldots,t_n) = E[e^{t_1X_1+\cdots+t_nX_n}]$$

تعریف می کنیم. هر تابع مولد گشتاور خاص را می توان از $\phi(t_1,\ldots,t_n)$ با صفر قرار دادن تمام t_j ها به استثنای یکی از آنها به دست آورد؛ یعنی

$$\phi_{X_i}(t) = E[e^{tX_i}] = \phi(0,\ldots,0,t,0,\ldots,0)$$

که درآن t در محل i ام قرار دارد.

می توان ثابت کرد (گرچه اثبات آن از سطح این کتاب بالاتر است) که $\phi(t_1,\ldots,t_n)$ بطور منحصر به فرد توزیع توأم X_1 ، ... ، X_n را تعیین می کند. در این صورت با به کار بردن این

نتیجه می توان ثابت کرد که n متغیر تصادفی X_1، ... ، X_n مستقلند اگر و تنها اگر

$$\phi(t_1, \ldots, t_n) = \phi_{X_1}(t_1) \cdots \phi_{X_n}(t_n) \tag{۸-۴}$$

اگر n متغیر تصادفی مستقل باشند، آن گاه نتیجه به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned}\phi(t_1, \ldots, t_n) &= E[e^{(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n)}] \\ &= E[e^{t_1X_1} \cdots e^{t_nX_n}] \\ &= E[e^{t_1X_1}] \cdots E[e^{t_nX_n}] \qquad \text{بنابر استقلال} \\ &= \phi_{X_1}(t_1) \cdots \phi_{X_n}(t_n)\end{aligned}$$

از طرف دیگر، اگر معادله (۸-۴) برقرار باشد. در این صورت تابع مولد گشتاور توأم $\phi(t_1, \ldots, t_n)$ مانند تابع مولد گشتاور توأم n متغیر تصادفی مستقل است که i امین آن دارای همان توزیع X_i است. چون تابع مولد گشتاور توأم منحصراً توزیع توأم را مشخص می کند، این توزیع بایستی توزیع توأم باشد ؛ از این رو متغیرهای تصادفی مستقلند.

مثال ۸ د. توزیع نرمال چند متغیره. فرض کنید $Z_1, \ldots, Z_n$ یک مجموعهٔ n متغیر تصادفی نرمال واحد مستقل باشد. اگر برای ثابتهای a_{ij}، $1 \le i \le m$، $1 \le j \le n$ و μ_i، $1 \le i \le m$ داشته باشیم

$$\begin{aligned}X_1 &= a_{11}Z_1 + \cdots + a_{1n}Z_n + \mu_1 \\ X_2 &= a_{21}Z_1 + \cdots + a_{2n}Z_n + \mu_2 \\ &\vdots \\ X_i &= a_{i1}Z_1 + \cdots + a_{in}Z_n + \mu_i \\ &\vdots \\ X_m &= a_{m1}Z_1 + \cdots + a_{mn}Z_n + \mu_m\end{aligned}$$

در این صورت گوییم متغیرهای تصادفی X_1 ، ... ، Z_n دارای توزیع نرمال چند متغیره هستند.

از این حقیقت که مجموع متغیرهای تصادفی نرمال مستقل خود یک متغیر تصادفی نرمال (مثال ۸ ب را ببینید) است نتیجه می شود که هر X_i دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس زیر می باشد.

$$E[X_i] = \mu_i$$

$$\operatorname{Var}(X_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

کوواریانس X_i و X_j عبارت است از

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X_i, X_j) &= \operatorname{Cov}\left(\mu_i + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} Z_k,\ \mu_j + \sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell} Z_\ell\right)\\ &= \operatorname{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} Z_k,\ \sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell} Z_\ell\right)\\ &= \sum_{k,\ell} a_{ik} a_{j\ell} \operatorname{Cov}(Z_k, Z_\ell)\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}\end{aligned}$$

چون

$$\operatorname{Cov}(Z_k, Z_\ell) = \begin{cases} 1 & k = \ell \\ 0 & k \neq \ell \end{cases}$$

تابع مولد گشتاور توأم عبارت است از

$$\phi(t_1, \ldots, t_m) = E[e^{(t_1 X_1 + \cdots + t_m X_m)}]$$

اکنون

$$\begin{aligned}t_1 X_1 + \cdots + t_m X_m = &(a_{11} t_1 + a_{21} t_2 + \cdots + a_{m1} t_m) Z_1\\ &+ (a_{12} t_1 + a_{22} t_2 + \cdots + a_{m2} t_m) Z_2\\ &+\\ &\vdots\\ &+ (a_{1n} t_1 + a_{2n} t_2 + \cdots + a_{mn} t_m) Z_n\\ &+ \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \cdots + \mu_m t_m\end{aligned}$$

و از این رو

$$\sum_{i=1}^{m} t_i X_i$$

دارای توزیع نرمال است با میانگین

$$E\left[\sum_{i=1}^{m} t_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} t_i \mu_i$$

و واریانس

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{m} t_i X_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} t_i\right)^2$$

بنابراین، با استفاده از این مطلب که اگر Y متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آن گاه

$$E[e^Y] = \phi_Y(t)|_{t=1} = e^{\mu+\sigma^2/2}$$

لذا نتیجه می شود که

$$\begin{aligned}\phi(t_1,\ldots,t_m) &= E\left[\exp\left\{\sum_1^m t_i X_i\right\}\right]\\ &= \exp\left\{\sum_{i=1}^m t_i\mu_i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^m a_{ik}t_i\right)^2\right\}\end{aligned}$$

اینک،

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^m a_{ik}t_i\right)^2 &= \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^m a_{ik}t_i\sum_{j=1}^m a_{jk}t_j\\ &= \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m t_it_j\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk}\\ &= \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m t_it_j\,\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\end{aligned}$$

و از این رو $\phi(t_1,\ldots,t_m)$ را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$\phi(t_1,\ldots,t_m) = \exp\left\{\sum_{i=1}^m t_i\mu_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m t_it_j\,\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right\}$$

و این نشان می دهدکه توزیع توأم $X_1, \ldots, X_m$ با آگاهی ازمقادیر $\mu_i = E[X_i]$ و $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ ، $i, j = 1, \ldots, m$ کاملاً مشخص می گردد.

۹ - تعریف کلی میانگین

تا اینجا میانگین را تنها برای متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته تعریف کرده ایم. لیکن، متغیرهای تصادفی که گسسته و پیوسته نباشند نیز وجود دارند و ممکن است دارای میانگین نیز باشند. برای مثال فرض کنید X متغیر تصادفی برنولی با پارامتر $p = \frac{1}{2}$ باشد و Y متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت روی فاصله $[0, 1]$ باشد، به علاوه فرض کنید که X و Y مستقلند و متغیر تصادفی جدید W را به صورت زیر تعریف کنید.

$$W = \begin{cases} X & X = 1 \\ Y & X \neq 1 \end{cases}$$

بطور واضح، متغیر تصادفی W گسسته نیست (چون مجموعه مقادیر ممکن آن $[0, 1]$ ناشمار است) و پیوسته نیست (زیرا $P(\{X = 1\}) = 1$).

برای این که میانگین یک متغیر تصادفی دلخواه را تعریف کنیم به نظریهٔ انتگرال استیلجس نیاز داریم. قبل از تعریف انتگرال استیلجس، خاطر نشان می کنیم که برای هر تابع g، $\int_a^b g(x)\, dx$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\int_a^b g(x)\, dx = \lim \sum_{i=1}^{n} g(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

که در آن حد روی تمام $a < x_0 < x_2 < \ldots < x_n = b$ وقتی $n \to \infty$ و $\max_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_{i-1}) \to 0$ حساب می شود.

برای هر تابع توزیع F انتگرال استیلجس تابعی نامنفی g را روی فاصله $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\int_a^b g(x)\, dF(x) = \lim \sum_{i=1}^{n} g(x_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

که در آن مانند قبل حد روی تمام $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ وقتی $n \to \infty$ و $\max_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_{i-1}) \to 0$ حساب می شود. به علاوه، انتگرال استیلجس را روی تمام خط حقیقی به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF(x) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b g(x)\, dF(x)$$

بالاخره، اگر g تابع نا منفی نباشد، g^+ و g^- را چنین تعریف می کنیم

$$g^+(x) = \begin{cases} g(x) & g(x) \geq 0 \\ 0 & g(x) < 0 \end{cases}$$

$$g^-(x) = \begin{cases} 0 & g(x) \geq 0 \\ -g(x) & g(x) < 0 \end{cases}$$

به قسمی که $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$ و g^+ و g^- هر دو نامنفی اند. طبیعی است که تعریف کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g^{+}(x)\, dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g^{-}(x)\, dF(x)$$

و گوییم $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dF(x)$ وجود دارد به شرط آن که $\int_{-\infty}^{+\infty} g^{+}(x)\, dF(x)$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} g^{-}(x)\, dF(x)$ هردو برابر $\infty +$ نباشند

اگر X متغیر تصادفی دلخواه با توزیع تجمعی F باشد، امید ریاضی X را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x) \tag{۱-۹}$$

اگر X متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم p (x) باشد. در این صورت می توان نشان داد

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x) = \sum_{x: p(x)>0} x p(x)$$

در حالی که X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی f(x) باشد، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

توجه کنید که معادلهٔ (۹ - ۱) با در نظر گرفتن مجموع تقریبی

$$\sum_{i=1}^{n} x_i[F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

از E [X] تعریف شهودی E [X] را می دهد. چون $F(x_i) - F(x_{i-1})$ احتمال آن است که X در فاصله (x_{i-1}, x_i) باشد، مجموع تقریبی فوق حاصلضرب کران بالای X را وقتی در فاصله (x_{i-1}, x_i) است دراحتمال این که X دراین فاصله باشد روی تمام فاصله هاجمع می کند. واضح است، وقتی طول این فاصله ها کوچک وکوچکترمی شوند، «امیدریاضی» X به دست می آید.

انتگرالهای استیلجس اصولاً از نظر تئوری جالب هستند زیرا آنها راه مختصر و مفیدی را برای تعریف و کار کردن با خواص میانگین به دست می دهند. مثلاً، با استفاده از انتگرال استیلجس نیازی ندارد قضایا را برای حالت پیوسته و گسسته جدا از هم بیان و اثبات نمود. لیکن، خواص آنها بطور گسترده ای مانند انتگرالهای معمولی است و بسادگی می توان تمام اثباتهای ارائه شده در این فصل را به اثبات در حالت کلی تبدیل کرد.

تمرینهای نظری

۱- حکم ۲-۱ الف را ثابت کنید.

۲- برخی کتابها $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ «تعریف می کنند». لیکن، چون $g(X)$ خود یک متغیر تصادفی است روشن نیست که «تعریف» فوق منطقاً سازگار باشد. زیرا همچنین از این «تعریف» نتیجه می شود که $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{g(X)}(y)\,dy$، و دلیل قبلی براین که لازم است این دو عبارت برای $E[g(x)]$ یکی باشند وجود ندارد. البته، این که این دو یکی هستند مفهوم قانون نا آگاهی است. اکنون فرض کنید برای هر متغیر تصادفی پیوسته X و تابعی با مقادیر حقیقی g، S - میانگین $g(X)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$S[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)(f_X(x))^2\,dx$$

با فرض این که X یک متغیر تصادفی یکنواخت روی $(0,1)$ باشد با محاسبه $S(X^2)$ به دو طریق مختلف نشان دهید که «تعریف» S - میانگین منطقاً نا سازگار است (یعنی، به تناقض منجر می شود).

۳- برای یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح نا منفی N نشان دهید که

$$\sum_{i=0}^{\infty} iP\{N > i\} = \tfrac{1}{2}(E[N^2] - E[N])$$

راهنمایی: $\sum_i iP\{N > i\} = \sum_i i \sum_{k=i+1}^{\infty} P\{N = K\}$، اینک ترتیب مجموعها را عوض کنید.

۴- برای متغیر تصادفی نا منفی X ثابت کنید

$$E[X^n] = \int_0^{\infty} nx^{n-1}(1 - F(x))\,dx$$

۵- نشان دهید $E[(X-a)^2]$ به ازای $a = E[X]$ مینیمم می شود.

۶- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی f می باشد. نشان دهید $E[|X - a|]$ وقتی a برابر میانه F باشد مینیمم می شود.

راهنمایی: بنویسید

$$E[|X - a|] = \int |x - a| f(x)\,dx$$

اکنون انتگرال را به ناحیه های $x < a$ و $x > a$ تفکیک نموده و مشتق بگیرید.

۷- مشابه دو بعدی حکم ۲-۱ را ثابت کنیدوقتی (الف) X و Y دارای تابع جرم احتمال مشترکند، و (ب) X , Y دارای تابع چگالی احتمال مشترکندو برای هر x و y ، $g(x, y) \geq 0$
۸- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 معلوم می‌باشد. و فرض کنید تابع $g(\cdot)$ دو مرتبه مشتق پذیر باشد. نشان دهید

$$E[g(X)] \approx g(\mu) + \frac{g''(\mu)}{2}\sigma^2$$

(راهنمایی: $g(\cdot)$ را بر حسب سری تیلور حول μ بسط دهید. از سه جمله اول استفاده نموده و از بقیه جملات صرف نظر کنید).
۹- یک سکه با احتمال p شیر می‌آید، آن را n بار پرتاب می‌کنیم. میانگین تعداد دفعاتی را که ۱ شیر، ۲ شیر، k شیر، $1 \leq k \leq n$ ، می‌آید پیدا کنید.
۱۰- فرض کنید X_1 ، X_2 ، . . . ، X_n متغیرهای تصادفی همتوزیع و مستقل باشند؛ برای $k \leq n$.

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right]$$

را بیابید.
۱۱- n آزمایش تصادفی مستقل را که هریک دارای r برآمد ممکن با احتمالات p_1 ، p_2 ، ... ، p_r می‌باشد در نظر بگیرید. فرض کنید X نمایش تعداد نتایجی باشد که در هیچ کدام از آزمایشها هرگز رخ نمی‌دهد. $E[X]$ را بیابید و نشان دهید که در میان تمام بردارهای احتمال p_1 ، p_2 ، . . . ، p_r وقتی $p_i = \frac{1}{r}$ ، $i = 1, \ldots, r$ ، باشد $E[X]$ مینیمم می‌شود
۱۲- بر مبنای آگاهی شما از واریانس متغیر تصادفی دوجمله‌ای و رابطهٔ بین متغیرهای تصادفی دوجمله‌ای و پواسن، حدس بزنید واریانس متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ چه خواهد بود؟ این موضوع را بطور تحلیلی ثابت کنید.
۱۳- واریانس متغیر تصادفی هندسی با میانگین $\frac{1}{p}$ را حساب کنید.
۱۴- واریانس متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ را پیدا کنید.
۱۵- واریانس متغیر تصادفی را که دارای توزیع یکنواخت روی (a, b) است به دست آورید.
۱۶- میانگین و واریانس متغیر تصادفی بتا با پارامترهای (a, b) را حساب کنید.

۱۷- میانگین و واریانس متغیر تصادفی گاما با پارامترهای (t, λ) را بیابید.

۱۸- از یک مجموعهٔ n عضوی یک زیر مجموعهٔ غیر تهی بتصادف انتخاب می کنیم با این فرض که تمام زیر مجموعه های غیر تهی با شانس مساوی انتخاب می شوند. فرض کنید X نمایش تعداد اعضای زیر مجموعهٔ انتخابی است. با استفاده از تساوی مفروض در تمرین نظری ۱۳ فصل ۱ نشان دهید که

$$E[X] = \frac{n}{2 - (\frac{1}{2})^{n-1}}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{n2^{2n-2} - n(n+1)2^{n-2}}{(2^n - 1)^2}$$

همچنین برای n های بزرگ نشان دهید

$$\mathrm{Var}(X) \sim \frac{n}{4}$$

با علم به این که نسبت فوق وقتی $n \to \infty$، به سمت ۱ میل کند. این حالت را با شکل حدی $\mathrm{Var}(Y)$ وقتی $P\{Y = i\} = \frac{1}{n}$، $i = 1, \ldots, n$، مقایسه کنید.

۱۹- آزمایشهای مستقلی انجام می دهیم. اگر i امین آزمایش با احتمال p_i یک موفقیت باشد مطلوب است: (الف) میانگین، و (ب) واریانس، تعداد موفقیتهایی که در n آزمایش نخست رخ می دهد. آیا استقلال در بند (الف) و بند (ب) تأثیری دارد؟

۲۰- فرض کنید X_1، ...، X_n متغیرهای تصادفی همتوزیع و مستقل با میانگین μ، و واریانس σ^2 باشند، و فرض کنید $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ نشان دهید که:

(a) $E[\bar{X}] = \mu$; (b) $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$;

(c) $E\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2\right] = (n-1)\sigma^2.$

۲۱- فرض کنید X_1، ...، X_n متغیرهای تصادفی پیوسته، همتوزیع و مستقل باشند. گوییم یک مقدار رکورد در زمان j، $j \le n$ رخ می دهد، اگر برای تمام $1 \le i \le j$، $X_j \ge X_i$، نشان دهید

(a) $E[\text{تعداد مقادیر حدنصاب}] = \sum_{j=1}^{n} 1/j.$

(b) $\mathrm{Var}(\text{تعداد مقادیر حدنصاب}) = \sum_{j=1}^{n} (j-1)/j^2$

۲۲- برای مثال ۳ چ نشان دهید که واریانس تعداد کوپنهای مورد نیاز برای جمع آوری یک مجموعه کامل برابر است با

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{iN}{(N-i)^2}$$

وقتی N بزرگ است می توان نشان داد که تقریباً برابر با $N^2\pi^2/6$ می باشد (با علم به این که وقتی $n \to \infty$ ، نسبت آنها به ۱ میل می کند).

۲۳- n آزمایش مستقل که در آن آزمایش i ام با احتمال p_i یک موفقیت است در نظر بگیرید، آن گاه

(الف) میانگین تعداد موفقیتها در n آزمایش را پیدا کنید و آن را μ بنامید.

(ب) برای مقدار ثابت μ ، چه انتخابی از P_1 ، ... ، P_n واریانس تعداد موفقیتها را ماکزیمم می کند؟

(ج) چه انتخابی واریانس را مینیمم می کند؟

۲۴- معادلهٔ (۵-۱) را ثابت کنید.

۲۵- از ظرفی که شامل n توپ سفید و m توپ سیاه است بطور تصادفی توپ بیرون می آوریم. در مثال ۳ د (نشان دادیم که وقتی X تعداد انتخابهای لازم برای به دست آوردن یک توپ سفید باشد $E[X] = 1 + m/(n+1)$

(الف) $Var(X)$ را بیابید.

(ب) نشان دهید که میانگین تعداد توپهایی که لازم است برای گردآوری مجموع k توپ سفید بیرون آورده شود برابر است با $k[1+m/(n+1)]$.

(راهنمایی: فرض کنید Y_i ، $i = 1, \ldots, n+1$ ، نمایش تعداد توپهای سیاه انتخابی پس از$(i-1)$ امین توپ سفید و قبل از i امین توپ سفید باشد. ثابت کنید که Y_i ها ، $i = 1, \ldots, n+1$ همتوزیعند

۲۶- واریانس متغیر تصادفی دو جمله ای منفی را بیابید.

۲۷- فرض کنید X_1 ، X_2 متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین مشترك μ باشند و همچنین فرض کنید که $Var(X_1) = \sigma_1^2$ و $Var(X_2) = \sigma_2^2$. مقدار μ معلوم است و در نظر داریم که μ را با متوسط موزون X_1 ، X_2 برآورد کنیم. یعنی، $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ را به عنوان برآورد μ با مقدار خاصی از λ به کار می بریم. چه مقدار λ برآوردی با کمترین واریانس

ممکن را می‌دهد؟ شرح دهید چرا استفاده از این مقدار λ مطلوب است.

۲۸- ثابت کنید:

(a) $\text{Cov}(a + bX, c + dY) = bd\,\text{Cov}(X, Y)$;
(b) $\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$;
(c) $\text{Cov}(\sum_{1}^{n} X_i, \sum_{1}^{m} Y_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \text{Cov}(X_i, Y_j)$.

۲۹- در مثال ۵ ث نشان دادیم که واریانس متغیرهای تصادفی چند جمله ای N_i و N_j وقتی N_i و N_j به صورت مجموع متغیرهای نشانگر بیان می‌شوند، برابر با $-m P_i P_j$ است این نتیجه را با استفاده از فرمول زیر نیز می‌توان به دست آورد.

$$\text{Var}(N_i + N_j) = \text{Var}(N_i) + \text{Var}(N_j) + 2\text{Cov}(N_i, N_j)$$

(الف) توزیع $N_i + N_j$ چیست؟

(ب) با استفاده از تساوی بالا نشان دهید که $\text{Cov}(N_i, N_j) = -m P_i P_j$

۳۰- اگر X ، Y همتوزیع ولی لزوماً مستقل نباشند، نشان دهید

$$\text{Cov}(X + Y, X - Y) = 0$$

۳۱ - **فرمول کوواریانس شرطی**. کو واریانس شرطی X و Y با فرض Z عبارت است از

$$\text{Cov}(X,Y|Z) \equiv E[(X - E[X|Z])(Y - E[Y|Z])|Z]$$

(الف) نشان دهید

$$\text{Cov}(X,Y|Z) = E[XY|Z] - E[X|Z]E[Y|Z]$$

(ب) فرمول کوواریانس شرطی زیر را ثابت کنید

$$\text{Cov}(X,Y) = E[\text{Cov}(X,Y|Z)] + \text{Cov}(E[X|Z], E[Y|Z])$$

(پ) در بند (ب) با قرار دادن $X = Y$ فرمول واریانس شرطی را به دست آورید.

۳۲ - فرض کنید $X_{(i)}$ ، $i = 1, \ldots, n$ ، نمایش آماره ترتیبی از یک مجموعه n متغیر تصادفی یکنواخت روی $(0, 1)$ باشد و توجه کنید که تابع چگالی $X_{(i)}$ عبارت است از

$$f(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1}(1-x)^{n-i}, \quad 0 < x < 1$$

(الف) $\mathrm{Var}(X_{(i)})$ ، $i = 1, \ldots, n$ ، را بیابید.

(ب) به ازای چه مقدار i ، $\mathrm{Var}(X_{(i)})$ مینیمم و به ازای چه مقدار i ماکزیمم می گردد.

۳۳- اگر $Y = a + bX$ ، نشان دهید

$$\rho(X, Y) = \begin{cases} +1 & b = 0 \\ -1 & b < 0 \end{cases}$$

۳۴- اگر Z متغیر نرمال استاندارد باشد و $Y = a + bZ + cZ^2$ ، نشان دهید

$$\rho(Y, Z) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}$$

۳۵- نا مساوی کوشی- شوارتز را ثابت کنید؛ یعنی ثابت کنید

$$(E[XY])^2 \le E[X^2]E[Y^2]$$

(راهنمایی: بجز $Y = -tX$ ، برای برخی مقدار ثابت در آن حالت نا مساوی به مساوی تبدیل می شود، نتیجه می شود که برای تمام مقادیر t

$$0 < E[(tX + Y)^2] = E[X^2]t^2 + 2E[XY]t + E[Y^2]$$

بنابر این ریشه های معادله درجه دوم

$$E[X^2]t^2 + 2E[XY]t + E[Y^2] = 0$$

باید موهومی باشند و این موجب می گردد که مبین معادله درجه دوم باید منفی باشد).

۳۶- نشان دهید که اگر X , Y مستقل باشند، آن گاه

$$E[X \mid Y = y] = E[X] \qquad \text{آن گاه برای هر } y$$

(الف) در حالت گسسته، و (ب) در حالت پیوسته

۳۷- ثابت کنید که

۳۸- ثابت کنید که اگر برای تمام x ها ، $E[Y|X = x] = E[Y]$ ، آنگاه X و Y ناهمبسته اند و با یک مثال نقص نشان دهید که وارون آن درست نیست.

(راهنمایی: این حقیقت را که $E[XY] = E[XE[Y \mid X]]$ ثابت نموده و به کار برید)

۳۹- ثابت کنید

$$\mathrm{Cov}(X, E[Y|X]) = \mathrm{Cov}(X, Y).$$

۴۰- با فرض این که X_1 ، ... ، X_n متغیرهای تصادفی همتوزیع و مستقل باشند

$$E[X_1 | X_1 + \cdots + X_n = x]$$

را بیابید.

۴۱- مثال ۵ ث را که در ارتباط با توزیع چند جمله ای است در نظر بگیرید. با استفاده از میانگین شرطی $E[N_i N_j]$ را حساب کنید و سپس با استفاده از آن فرمول $\mathrm{Cov}(N_i, N_j)$ ارائه شده در مثال ۵ ث را ثابت کنید.

۴۲- کیسه ای شامل b توپ سیاه و w توپ سفید است. در هر مرحله r توپ سیاه اضافه نموده و سپس بتصادف r توپ از b + w + r توپ بیرون می آوریم. نشان دهید که

E [تعداد توپهای سفید پس از مرحلهٔ t] $= \left(\dfrac{b+w}{b+w+r}\right)^t w.$

۴۳- معادلهٔ (۶-۱ ب) را ثابت کنید.

۴۴- یک سکه را که با احتمال p شیر می آید بطور متوالی پرتاب می کنیم. میانگین تعداد پرتابهایی را حساب کنید که برای به دست آوردن یک رشته از r شیر در یک ردیف انجام می دهیم.

(**راهنمایی**: برحسب زمان اولین رویدادخط ، شرطی کنیدو معادله زیررا به دست آورید:

$$E[X] = (1-p)\sum_{i=1}^{r} p^{i-1}(i + E[X]) + (1-p)\sum_{i=r+1}^{\infty} p^{i-1} r$$

و آن را برای $E[X]$ ساده و حل نمایید.

۴۵- از یک کیسه حاوی a توپ سفید و b توپ سیاه هربار یک توپ بتصادف انتخاب می کنیم تا زمانی که تمام توپهای باقیمانده درظرف از یک رنگ باشند. فرض کنید $M_{a,b}$ نمایش میانگین تعداد توپهای باقیمانده در ظرف پس از پایان آزمایش باشد. یک فرمول بازگشتی برای $M_{a,b}$ حساب کنید و آن را برای a = ۳ و b = ۵ حل کنید.

۴۶- کیسه ای شامل a توپ سفید و b توپ سیاه است. پس از انتخاب یک توپ ، اگر آن توپ سفید باشد آن را به کیسه بر می گردانیم؛ ولی اگر سیاه باشد آن را با یک توپ سفید از ظرف دیگری جایگزین می کنیم. فرض کنید M_n نمایش میانگین تعداد توپهای سفید در کیسه پس از تکرار n بار عمل فوق الذکر باشد:

(الف) معادله بازگشتی زیر را به دست آورید.

$$M_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) M_n + 1$$

(ب) با استفاده از بند (الف) ثابت کنید

$$M_n = a + b - b\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^n$$

(پ) احتمال آن که $(n+1)$ امین توپ انتخابی سفید باشد چقدر است؟

۴۷- بهترین برآوردگر خطی Y نسبت به X_1 , X_2 برابر با $a + bX_1 + cX_2$ است، که در آن a , b و c به قسمی انتخاب می شوند که

$$E[(Y - (a + bX_1 + cX_2))^2].$$

مینیمم شود. $a + b$ و c را بیابید

۴۸- بهترین برآوردگر خطی درجه دوم نسبت به X برابر با $a + bX + cX^2$ است، که در آن a , b و c به قسمی انتخاب می شوند که $E[(Y - (a + bX + cX^2)]$ مینیمم شود a , b ، و c را بیابید.

۴۹- اگر X و Y دارای توزیع نرمال توأم با تابع چگالی توأم زیر باشند

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right\}$$

(الف) نشان دهید که توزیع شرطی Y با فرض $X = x$ ، نرمال با میانگین $\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$ و واریانس $\sigma_2^2(1 - \rho^2)$ می‌باشد.

(ب) نشان دهید که $\text{Corr}(X, Y) = \rho$ ؛

(پ) ثابت کنید که X , Y مستقلند اگر و تنها اگر $\rho = 0$ باشد.

۵۰- فرض کنید X متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$ می‌باشد و فرض کنید I ، مستقل از X ، چنان باشد که $P\{I = 1\} = \frac{1}{2} = P\{I = 0\}$. اکنون Y را به صورت

زیر تعریف می کنیم

$$Y = \begin{cases} X & I = 1 \\ -X & I = 0 \end{cases}$$

یعنی Y با احتمال مساوی برابر X یا X - است.

(الف) آیا X و Y مستقلند؟

(ب) آیا I و Y مستقلند؟

(پ) نشان دهید که Y نرمال با میانگین o و واریانس ۱ است

(ت) نشان دهید که $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

(ث) آیا (الف)، (پ) و (ت) با نتیجه تمرین نظری ۴۲، که بیان می کند متغیرهای تصادفی نرمال توأم ناهمبسته مستقلند، تناقض دارد؟

۵۱- از حکم ۷-۱ و این حقیقت که بهترین برآوردگر خطی Y نسبت X عبارت است از $\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \mu_x)$، نتیجه می شود که اگر

$$E[Y|X] = a + bX$$

در این صورت

$$a = \mu_y - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\mu_x \qquad b = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

(چرا) ؟ این مطلب را مستقیماً ثابت کنید.

۵۲- برای متغیرهای تصادفی X و Z نشان دهید که

$$E[(X - Y)^2] = E[X^2] - E[Y^2]$$

که در آن

$$Y = E[X|Z]$$

۵۳- یک جامعه شامل افرادی را که قادرند نوزادی از همان خانواده تولید کنند در نظر بگیرید فرض کنید که هر فرد تا پایان عمرش j نوزاد جدید با احتمال $P_j \geq 0$, j مستقل از تعداد تولید شده توسط افراد دیگر تولید می کند. تعداد افراد اولیهٔ موجود را با X_0 نشان می دهیم و آن را حجم نسل o ام می نامیم. تمام نوزادان نسل o ام نسل اول را می سازند که تعدادشان

را با X_1 نشـان می دهیم . بطور کلی ، فرض کنیـد X_n حـجم نسل n ام را نشـان می دهد . فرض کنید $\mu = \sum_{j=0}^{\infty} jP_j$ و $\sigma^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (j-\mu)^2 P_j$ به ترتیب میانگین و واریانس تعداد نوزادان حاصل یک فرد منفرد باشد .

فرض کنید $X_0 = 1$ - یعنی ، مقدمةً یک فرد تنها در جامعه وجود دارد .

(الف) نشان دهید

$$E[X_n] = \mu E[X_{n-1}]$$

(ب) با استفاده از قسمت (الف) نتیجه بگیرید که

$$E[X_n] = \mu^n$$

(پ) نشان دهید که

$$\mathrm{Var}\,(X_n) = \sigma^2\mu^{n-1} + \mu^2\,\mathrm{Var}\,(X_{n-1})$$

(ت) با استفاده از (پ) نتیجه بگیرید که

$$\mathrm{Var}\,(X_n) = \begin{cases} \sigma^2\mu^{n-1}\left(\dfrac{\mu^n - 1}{\mu - 1}\right) & \text{و } \mu \neq 1 \\ n\sigma^2 & \text{و } \mu = 1 \end{cases}$$

موضوع فوق مشهور به «فرآیند شاخه ای» است و برای جامعه ای که با چنین طرحی توسعه می یابد یک سئوال مهم مقدار احتمال این که جامعه سرانجام نابود خواهد شد می باشد . فرض کنید وقتی جامعه با یک فرد تنها شروع می شود π چنین احتمالی باشد

$$\pi = P\{\text{جامعه سرانجام نابود می شود} \mid X_0 = 1\}$$

(ث) ثابت کنید که π در رابطه زیر صدق می کند

$$\pi = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \pi^j$$

(راهنمایی : روی تعداد نوزاد نخستین عضو جامعه شرطی کنید)

۵۴- فرمول تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی یکنواخت داده شده در جدول ۷-۲ را ثابت کنید . همچنین ، با مشتق گیری فرمولهای میانگین و واریانس را ثابت کنید .

۵۵- اگر برای a و b ثابت، $Y = aX + b$ باشد، تابع مولد گشتاور Y را برحسب جملات تابع مولد گشتاور X بیان کنید.

۵۶- فرض کنید X دارای تابع مولد گشتاور $\phi(t)$ است با تعریف کردن $\psi(t) = \log \phi(t)$ نشان دهید که

$$\Psi''(t)|_{t=0} = \mathrm{Var}(X)$$

۵۷- اگر X_1 ، ... ، X_n متغیرهای تصادفی همتوزیع و مستقل، هریک با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ باشند. با استفاده از جدول ۷ - ۲ توزیع $\sum_{i=1}^{n} X_i$ را بیابید.

۵۸- نشان دهید چگونه $\mathrm{Cor}(X, Y)$ از تابع مولد گشتاور توأم محاسبه می شود.

۵۹- فرض کنید X_1 ، ... ، X_n دارای توزیع نرمال چند متغیره باشند. نشان دهید که متغیرهای تصادفی X_1 ، ... ، X_n مستقلند اگر و تنها اگر

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0 \qquad i \neq j$$

۶۰- اگر Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد $\mathrm{Cov}(Z, Z^2)$ چقدر است؟

مسائل

۱- شخصی به هدفی تیراندازی می کند، اگر تیر او به محدودهٔ یک سانتی متری هدف اصابت کند ۱۰ امتیاز می گیرد، اگر بین ۱ تا ۳ سانتی متری هدف اصابت کند ۱۵ امتیاز می گیرد، و اگر به ۳ تا ۵ سانتی متری هدف بخورد ۱۳ امتیاز می گیرد. میانگین تعداد امتیازهای ثبت شده را بیابید اگر

(الف) تیراندازی شخص در درون دایره ای به شعاع ۸ سانتی متر به مرکز هدف دارای توزیع یکنواخت باشد.

(ب) فاصلهٔ افقی و عمودی تیراندازی شخص از هدف (بر حسب سانتی متر) متغیرهای نرمال همتوزیع مستقل با پارامترهای $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 4$ باشند.

۲- یک بازی متداول با تاس در کلوپهای انگلیس ، بازی شرط بندی روی اعداد تاس است که با پرتاب ۳ تاس بازی می شود . یک بازیکن روی هر یک از اعداد ۱ تا ۶ شرط بندی می کند . اگر دقیقاً یکی از ۳ تاس آن عدد را نشان دهد بازیکن ۱ به ۱ می برد؛ اگر ۲ تاس عدد انتخابی را نشان دهند بازیکن ۲ به ۱ دریافت می کند؛ و اگر هر سه تاس انتخاب بازیکن را نشان دهند بازیکن ۳ به ۱ دریافت می کند اگر هیچ یک از سه تاس انتخاب بازیکن را نشان ندهند بازیکن می بازد . اگر در این بازی ۱ واحد شرط بندی کند میانگین برد بازیکن را بیابید .

۳- می دانیم از پنج قطعهٔ تشکیل دهنده یک وسیلهٔ الکتریکی دو قطعهٔ آن معیوب است . اگر برای یافتن قطعه های معیوب باید هربار بتصادف یکی از قطعه ها را آزمود ، در این صورت میانگین آزمونهای لازم را بیابید .

۴- دو شخص A و B بازی شرطی زیر را بازی می کنند : A یکی از اعداد ۱ یا ۲ را یاد داشت می کند و B باید حدس بزند کدام یکی است . اگر عددی که A نوشته است i باشد و B درست حدس بزند ، B از A مبلغ i واحد پول دریافت می کند . اگر B اشتباه حدس بزند B به A مقدار $\frac{۳}{۴}$ واحد پول می پردازد . اگر B تصمیم خود را تصادفی کند و ۱ را با احتمال p و ۲ را با احتمال p - 1 حدس بزند میانگین سود B را تعیین کنید اگر (الف) A عدد ۱ را یاد داشت کند ، و (ب) A عدد ۲ را یاد داشت کند .

چه مقدار p مینیمم مقدار ممکن میانگین سود B را ماکزیمم می کنند و این مقدار ماکزیمم چیست ؟ (توجه کنید که میانگین سود B تنها به P بستگی ندارد . بلکه به آنچه که A انجام می دهد نیز بستگی دارد .)

اکنون بازیکن A را در نظر بگیرید . فرض کنید که او نیز تصمیم خود را تصادفی کند و با احتمال q عدد ۱ را یاد داشت کند . میانگین ضرر A چیست اگر (پ) B عدد ۱ را انتخاب کند ، و (ت) B عدد ۲ را انتخاب کند .

چه مقدار q ماکزیمم میانگین ضرر A را مینیمم می کند؟ نشان دهید که مینیمم ماکزیمم میانگین ضرر A برابر با ماکزیمم سود B است . این نتیجه که به عنوان قضیه ماکزیمم شناخته می شود ، اولین بار کلیت آن توسط جان ـ ون ـ نیومن ریاضی دان ثابت شد و در قواعد ریاضی یک نتیجه اساسی است که به عنوان نظریه بازیهای شرطی شناخته می شود . مقدار مشترك را مقدار بازی شرطی برای بازیکن B می نامند .

۵- یک نوع ماشین شکاف دار دارای سه صفحه مدرج هریک با ۲۰ علامت (گیلاس، لیمو، آلو، پرتقال، زنگ، میله) است. صفحات مدرج شاخص به صورت زیر تشکیل می شوند.

	صفحه ۱	صفحه ۲	صفحه ۳
گیلاس	۷	۷	۰
پرتقال	۳	۷	۶
لیمو	۳	۰	۳
آلو	۴	۱	۶
زنگ	۲	۲	۳
میله	۱	۳	۱

طبق این جدول از ۲۰ شکاف روی صفحه ۱، ۷ تا گیلاس و ۳ تا پرتقال و الی آخر می باشد. پرداخت شاخص برای یک واحد شرط بندی بر طبق جدول زیر است:

صفحه ۱	صفحه ۲	صفحه ۳	پرداخت
میله	میله	میله	۶۰
زنگ	زنگ	زنگ	۲۰
زنگ	زنگ	میله	۱۸
آلو	آلو	آلو	۱۴
پرتقال	پرتقال	پرتقال	۱۰
پرتقال	پرتقال	میله	۸
گیلاس	گیلاس	هرچه باشد	۴
گیلاس	غیر گیلاس	هرچه باشد	۲
هر چیز دیگر			۱-

میانگین برد بازیکن با ماشین شکاف دار را در یک بار بازی بیابید.

۶- یکی از اعداد ۱ تا ۱۰ را بتصادف انتخاب می کنم. شما باید سعی کنید با پرسیدن سؤالاتی با جواب «بله یا خیر» عدد انتخابی را حدس بزنید. میانگین تعداد سؤالاتی را که نیاز دارید در هریک از دو حالت زیر بپرسید حساب کنید:

(الف) سؤال i ام شما این باشد که «آیا i است»، $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

(ب) با هر سؤال شما می کوشید تا حد ممکن نزدیک نصف اعداد باقیمانده را حذف کنید.

۷- یک شرکت بیمه شیوه ای را تدوین کرده که موجب می گردد اگر پیشامد E در مدت یک سال رخ دهد مبلغ A ریال باید پرداخت نماید. اگر شرکت برآورد کند که E در یک سال با احتمال p رخ خواهد داد، شرکت برای این که میانگین سودش ده درصد A باشد از مشتریان باید چقدر دریافت کند.

۸- از جعبه ای شامل ۲۰ شیئ که ۴ تای آن معیوبند یک نمونهٔ سه تایی انتخاب می کنیم میانگین تعداد معیوبها در نمونه را بیابید.

۹- دو علت ممکن برای خراب شدن یک ماشین وجود دارد. بررسی اولین امکان C_1 تومان هزینه دارد. و اگر علت خراب شدن آن باشد هزینهٔ تعمیر ماشین R_1 تومان می باشد. بطور مشابه برای امکان دوم هزینه های مشابهی مانند C_2 , R_2 وجود دارند فرض کنید p ، $1 - p$ به ترتیب نمایش احتمال خراب شدن با امکان اول و دوم باشند. تحت چه شرایطی روی p ، C_i ، R_i ، $i = 1 , 2$ ، اولین امکان خرابی و سپس دومین امکان را بررسی کنیم، چنان که مانع عکس شدن ترتیب بررسی گردد، به قسمی که میانگین هزینه لازم برای بازگشت به حالت کار مینیمم گردد.

۱۰- شخصی یک سکهٔ سالم را پرتاب می کند تا این که برای اولین بار خط بیاید. اگر در پرتاب n ام خط بیاید شخص 2^n تومان می برد. فرض کنید X نمایش برد بازیکن باشد. نشان دهید $E[X] = +\infty$. این مسأله به نام پارادوکس پیترز برگ مشهور است.

(الف) آیا مایلید با پرداخت ۱ میلیون تومان این بازی شرطی را یک بار بازی کنید.

(ب) آیا مایلید برای هر بار بازی ۱ میلیون تومان بپردازید اگر بتوانید تا هر زمان که مایلید بازی کنید و تنها وقتی که بازی را متوقف می کنید باید تسویه حساب کنید.

۱۱- فرض کنید X_1 , X_2 , . . . دنباله ای از متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل و همتوزیع باشند. فرض کنید $N > 2$ چنان باشد که

$$X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_{N-1} < X_N$$

یعنی، N نقطه ای است که در آن دنباله دیگر کاهش نمی یابد. نشان دهید که $E[N] = e$.

۱۲- اگر X دارای تابع چگالی به صورت زیر باشد $E[X]$ را حساب کنید .

$$\text{(a)}\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}xe^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$\text{(c)}\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x^2} & x > 5 \\ 0 & x \le 5 \end{cases}$$

۱۳- تابع چگالی X عبارت است از

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اگر $E[X] = \frac{3}{5}$ ، a و b را بیابید .

۱۴- زمان عمر یک لامپ الکتریکی بر حسب ساعت یک متغیر تصادفی است با تابع چگالی زیر

$$f(x) = \alpha^2 x e^{-\alpha x} \qquad x \ge 0$$

میانگین زمان عمر چنین لامپی را بیابید .

۱۵- اگر X_1 ، ... ، X_n متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ باشند. مطلوب است :

(a) $E[\max(X_1, \ldots, X_n)]$. (b) $E[\min(X_1, \ldots, X_n)]$.

۱۶- فرض کنید متغیر تصادفی X روی $(0, 1)$ یکنواخت باشد. با به کار بردن حکم ۲-۱ ، $E[X^n]$ را بیابید و سپس نتیجه را با استفاده از تعریف میانگین بررسی کنید .

۱۷- هر شب هواشناسان مختلف این « احتمال» را می دهند که روز بعد باران خواهد بارید. برای قضاوت این که این اشخاص به چه خوبی پیش بینی می کنند هریک از آنها را به صورت زیر امتیاز می دهیم : اگر هواشناسی اعلام کند که با احتمال p باران خواهد بارید در این صورت امتیاز زیر را کسب می کند :

اگر باران ببارد $1-(1-p)^2$
اگر باران نبارد $1-p^2$

سپس امتیازات را برای مدت زمان معینی پی گیری می کنیم و نتیجه می گیریم که هواشناس با بیشترین متوسط امتیاز بهترین پیشگوی هواست. اکنون فرض کنید که یک هواشناس این موضوع را می داند و لذا می خواهد که میانگین امتیاز خود را ماکزیمم کند، اگر این شخص واقعاً باور داشته باشد که فردا با احتمال p^* باران می بارد، برای آن که میانگین امتیاز او ماکزیمم شود چه مقدار برای P باید اعلام کنند.

۱۸- (الف) باید یک ایستگاه آتش نشانی در امتداد جاده ای به طول A مستقر گردد، $A<\infty$، اگر آتش در نقطه ای که بطور یکنواخت روی $(0, A)$ انتخاب می شود رخ دهد، ایستگاه را در کجا باید مستقر کرد تا این که میانگین فاصله از آتش مینیمم گردد. یعنی، a را چنان انتخاب کنید که $E[|X-a|]$ مینیمم گردد وقتی X دارای توزیع یکنواخت روی $(0, A)$ است.

(ب) اکنون فرض کنید که طول جاده بی نهایت است و از نقطه 0 به سمت ∞ امتداد دارد، اگر فاصلهٔ آتش از 0 دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد، در این حال ایستگاه آتش نشانی را در کجا باید قرار دارد؟ یعنی اکنون می خواهیم $E[|X-a|]$ را مینیمم کنیم وقتی X نمایی با پارامتر λ است.

(پ) m را میانه توزیع دلخواه F گوییم اگر

$$F(m) \geq \tfrac{1}{2} \quad \text{و} \quad 1-F(m) \geq \tfrac{1}{2}$$

(بنابراین، برای توزیع پیوسته میانه مقدار منحصر به فرد m است به قسمی که $F(m)=\frac{1}{2}$). وقتی X دارای تابع توزیع F است در مورد مقدار a که $E[|X-a|]$ را مینیمم می کند چه می توان گفت؟

۱۹- روزنامه فروشی روزنامه را به ۱۰ ریال خریده و به ۱۵ ریال می فروشد و اجازه بازگرداندن روزنامه های فروش نشده را ندارد. اگر احتیاج روزانه اش متغیر تصادفی دوجمله ای با $n=۳۰۰$ و $p=\frac{1}{3}$ باشد. تقریباً چند روزنامه باید بخرد به قسمی که میانگین سودش ماکزیمم گردد.

۲۰- در مثال ۲ پ فرض کنید فروشگاه برای هر واحد تقاضای انجام نشده یک هزینه اضافی با

نرخ c مواجه می شود. (این هزینه اغلب به عنوان هزینهٔ رضایت منظور می گردد. زیرا فروشگاه رضایت مشتریانی که در خواستشان را نمی تواند برآورده سازد از دست می دهد). میانگین سود را وقتی فروشگاه s کالا ذخیره نموده است بیابید و مقدار s ای که میانگین سود را ماکزیمم می کند تعیین کنید.

۲۱- مثال ۲ ت را وقتی فروشگاه با هزینهٔ اضافی با نرخ c برای هر درخواست انجام نشده روبرو است تکرار کنید.

۲۲ - بازی شرط بندی رد ـ داك یک بازی دو نفره است که با یک دست کارت که تمام مقادیر از 0 تا 1 را نشان می دهد بازی می شود. هر بازیکن یک واحد شرط می بندد سپس بازیکن A یک کارت X به فرد مقابلش، بازیکن B، و یک کارت Y به خودش می دهد. در این صورت به بازیکن B فرصت داده می شود که مبلغی بین ۱ تا M واحد شرط بندی کند یا کنار بکشد. اگر B کنار بکشد A شرط را می برد، اگر B شرط ببندد A باید شرط را جبران کند. هرکس کارت با مقدار بیشتری داشته باشد بانک را می برد. فرض کنید X ، Y متغیرهای تصادفی مستقلند و هریک دارای توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ می باشند. یک استراتژی برای بازیکن B تابع $f(x)$ ، $0 < x < 1$ ، است که درآن برای $x \in (0,1)$ تابع $f(x)$ صفر است یا بین ۱ و M می باشد. استراتژی $f(x)$ آن است که به بازیکن B می گوید که چه وقت کارت او x است، اگر $f(x)=0$ بازیکن B باید کنار بکشد و اگر $f(x) \neq 0$ به اندازه $f(x)$ شرط ببندد.

(الف) اگر B استراتژی $f(x)$ را به کار برد میانگین برد او را در یک بار بازی رد ـ داك پیدا کنید.

(ب) نشان دهید استراتژی بهینه برای بازیکن B ، یعنی، استراتژی که میانگین بردش را ماکزیمم کند به صورت زیر است.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ (B \text{ کنار بکشد}) & x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ M & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

(پ) اگر B استراتژی بهینه را به کار برد میانگین برد B را پیدا کنید.

۲۳- یک پیام دوتایی ـ 0 یا ۱ - از محل A به محل B ارسال می گردد. به علت «اغتشاش» انتقال اگر پیام ۱ باشد مقدار ۲ و اگر پیام 0 باشد مقدار ۲ - را ارسال می کنیم. اگر x مقدار

ارسال شده باشد در این صورت $R = x + N$ مقدار دریافتی است وقتی N نمایش خطای انتقال یا صداست و یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد است. قانونی که در محل B برای کشف پیام به کار می رود به صورت زیر است.

اگر $R > C$ نتیجه می گیریم که پیام ۱ است

اگر $R < C$ نتیجه می گیریم که پیام 0 است

فرض کنید اگر پیام 0 ارسال شود و به غلط پیام 1 دریافت گردد هزینه ای برابر 10 واحد متحمل می شویم و اگر پیام 0 دریافت شود وقتی پیام ارسال شده واقعاً ۱ باشد هزینه ای برابر ۲۰ واحد متحمل می شویم. اگر ۲۵ درصد از زمان پیام ۱ عدد یک ارسال شود، چه مقدار C میانگین هزینهٔ تحمیلی را مینیمم می کند.

۲۴- یک پیام دوتایی از محل A به محل B انتقال می دهیم. به علت خطا در انتقال، پیام 0 را با $-x$ و پیام ۱ را با $+x$ کد گذاری می کنیم. اگر مقدار y از محل A ارسال شود، در این صورت مقدار دریافتی در محل B عبارت است از $R = y + N$ که در آن N متغیر نرمال استاندارد است. اگر R در محل B دریافت شود، در این صورت قانون کشف پیام به کار برده شده عبارت است

اگر $R > 0$ نتیجه می گیریم ۱

اگر $R < 0$ نتیجه می گیریم ۲

فرض کنید که هزینهٔ ارسال مقدار x برابر $10\,|x| + 2$ و هزینه نتیجه گیری پیام نادرست ۶۰ باشد. وقتی پیام ارسالی با احتمال مساوی 0 یا 1 است چه مقدار x میانگین کل هزینه را مینیمم می کند.

۲۵- ۱۰۰ نفر برای تشخیص این که به بیماری معینی مبتلا هستند یا خیر، خون آنها آزمایش می شود. لیکن به جای آزمون خون هر فرد به تنهایی ابتدا تصمیم می گیریم که افراد را به گروههای ۱۰ تایی دسته بندی کنیم، نمونه های خون ۱۰ فرد در هر گروه را روی هم ریخته و با یکدیگر تجزیه و تحلیل می کنیم؛ اگر آزمون منفی باشد یک آزمون برای ۱۰ نفر کافی است: در حالی که اگر آزمون مثبت باشد هریک از ۱۰ نفر نیز به تنهایی آزمون می شوند و روی هم در این گروه ۱۱ آزمون انجام می شود. فرض کنید احتمال آن که فردی

مبتلا باشد برای تمام افراد مستقل از یکدیگر ۰/۱ باشد :

میانگین تعداد آزمونهای لازم برای ۱۰۰ نفر را حساب کنید. (توجه کنید که فرض می کنیم آزمون هر گروه مثبت خواهد بود اگر حداقل یک نفر در گروه بیمار باشد).

۲۶- از هریک از پنج کیسه بتصادف یک توپ انتخاب می کنیم. کیسه ها به ترتیب شامل ۱ سفید و ۵ سیاه، ۳ سفید و ۳ سیاه، ۶ سفید و ۴ سیاه، ۲ سفید و ۶ سیاه، و ۳ سفید و ۷ سیاه می باشند. میانگین تعداد توپهای سفید انتخابی را بیابید.

۲۷- فرض کنید Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد و برای x ثابت قرار دهید

$$X = \begin{cases} Z & Z > x \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نشان دهید که

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

۲۸- یک دست از n کارت شماره گذاری شده از ۱ تا n را بطور کامل بُر می زنیم به قسمی که بتوان فرض کرد که تمام !n ترتیب ممکن احتمال مساوی دارند. فرض کنید که باید پی در پی n حدس بزنید که در آن حدس i ام کارتی است که در محل i است. فرض کنید N نمایش تعداد حدسهای درست باشد.

(الف) اگر شما هیچ اطلاعی در باره حدسهای قبلی خود نداشته باشد نشان دهید که برای هر استراتژی $E[N] = 1$.

(ب) فرض کنید پس از هر حدس کارتی که در موقعیت سئوال بوده به شما نشان دهند. فکر می کنید بهترین استراتژی چه باشد؟ با این استراتژی نشان دهید که

$$\begin{aligned} E[N] &= 1/n + 1/(n-1) + \cdots + 1 \\ &\approx \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \log n \end{aligned}$$

(پ) فرض کنید پس از هر حدس گفته شود که درست یا اشتباه حدس زده اید. در این حالت می توان نشان داد که شیوه ای که $E[N]$ را ماکزیمم می کند همان است که حدس زدن روی یک کارت را ادامه دهیم تا زمانی که گفته شود حدس ما درست است و سپس به کارت جدید تغییر دهیم. برای این شیوه نشان دهید که

$$\begin{aligned} E[N] &= 1 + 1/2! + 1/3! + \cdots + 1/n! \\ &\approx e - 1 \end{aligned}$$

(راهنمایی : در تمام قسمتها N را به صورت مجموع متغیرهای تصادفی نشانگر (برنولی) بیان کنید) .

۲۹- از یک دست کارت معمولی ۵۲ تایی کارتها را هر بار یکی رو می کنیم . اگر کارت اول یک آس یا دومی یک دولو یا سومی یک سه ، یا . . . . ، یا سیزدهمی یک شاه یا چهاردهمی یک آس و الی آخر باشد می گوییم یک تطابق رخ داده است . توجه کنید لزومی ندارد که $(13n+1)$ امین کارت آس خاصی باشد تا تطابق رخ دهد بلکه تنها باید یک آس باشد . میانگین تعداد تطابقهایی را که رخ می دهد حساب کنید .

۳۰- در ناحیهٔ معینی r نوع متمایز از انواع مشخص از گونه هایی حشرات زندگی می کنند و احتمال گرفتن هر حشره از نوع i مستقل از انواع گرفته شده قبلی برابر خواهد بود با

$$P_i, i = 1, \ldots, r \qquad \sum_1^r P_i = 1$$

(الف) میانگین تعداد حشراتی را که گرفته شده اند قبل از این که یکی از نوع اول گرفته شود، حساب کنید .

(ب) میانگین تعداد انواع حشراتی که گرفته شده اند قبل از این که یکی از نوع اول گرفته شود را حساب کنید .

۳۱- کیسه ای شامل n توپ است به قسمی که توپ i ام دارای وزن $W(i)$ ، $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ، می باشد . هردفعه یک توپ بدون جایگذاری طبق قانون زیر انتخاب می کنیم . در هر انتخاب احتمال این که توپ معینی از کیسه خارج شود برابر با وزن آن توپ بخش برمجموع وزنهای باقیمانده در کیسه می باشد . لذا به عنوان مثال، اگر در زمانی i_1 ، ... ، i_r مجموعه توپهای باقیمانده در ظرف باشند، آن گاه انتخاب بعدی i_j با احتمال $W(i_j) / \sum_{k=1}^{r} W(i_k)$ ، $j = 1, 2, \ldots, r$ خواهد بود . میانگین تعداد توپهای انتخابی قبل از توپ شماره ۱ را حساب کنید .

۳۲- برای یک گروه ۱۰۰ نفری مطلوب است :

(الف) میانگین تعداد روزهای سال که روز تولد دقیقاً ۳ نفر باشد .

(ب) میانگین تعداد روزهای تولد متمایز .

۳۳- چند مرتبه انتظار دارید یک تاس سالم را قبل از این که تمام ۶ وجه حداقل یک بار ظاهر شود پرتاب کنید؟

۳۴- کیسهٔ (۱) شامل ۵ توپ سفید و ۶ توپ سیاه است، در حالی که کیسهٔ (۲) شامل ۸ توپ سفید و ۱۰ توپ سیاه است. دو توپ بتصادف از کیسه (۱) بیرون می‌آوریم و سپس آنها را در کیسهٔ (۲) می گذاریم. حالا سه توپ بتصادف از کیسه (۲) بیرون می‌آوریم میانگین توپهای سفید بین این سه توپ را حساب کنید.

(**راهنمایی**: فرض کنید $X_i = 1$ اگر توپ سفید i ام انتقالی از کیسهٔ (۱) یکی از این سه توپ انتخابی باشد، و درغیر این صورت فرض می کنیم $X_i = 0$. بطورمشابه فرض کنید $Y_i = 1$. اگر توپ سفید i ام از کیسه (۲) یکی ازاین سه توپ انتخابی باشد و در غیر این صورت فرض می کنیم $Y_i = 0$. اکنون تعداد توپهای سفید بین این سه توپ را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\sum_{1}^{5} X_i + \sum_{1}^{8} Y_i.$$

۳۵- اگر $E[X] = 1$ و $Var(X) = 5$ مطلوبست:

(الف) $E[(2 + X)^2]$

(ب) $\mathrm{Var}(4 + 3X)$

۳۶- ۱۰ زوج متاهل به تصادف سر یک میز گرد می نشینند،

(الف) میانگین تعداد زنهایی را که کنار همسرشان نشسته اند حساب کنید.

(ب) واریانس تعداد زنهایی را که کنار همسرشان نشسته اندحساب کنید.

۳۷- از یک دست ورق معمولی هر بار یک ورق بر می گردانیم. میانگین تعداد ورقهایی را که لازم است برگردانده شوند تا

(الف) ۲ آس، (ب) ۵ پیک، و (پ) ۱۳ دل بیاید حساب کنید.

۳۸- فرض کنید X تعداد ۱ ها و Y تعداد ۲ هایی باشد که در پرتاب n تاس سالم رخ می دهد؛ $Cov(X, Y)$ را حساب کنید. (راهنمایی: قسمت (پ) تمرین ۲۶ نظری را به کار برید)

۳۹- یک تاس را دوبار پرتاب می کنیم. فرض کنید X برابر مجموع نتایج باشد و فرض کنید Y برابر نتیجهٔ اول منهای نتیجهٔ دوم باشد. $Cov(X, Y)$ را حساب کنید.

۴۰- متغیرهای تصادفی Y, X دارای تابع چگالی توأم زیرند.

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-2y}/x & 0 \le x < \infty, 0 \le y \le x \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$\mathrm{Cov}(X, Y)$ را حساب کنید.

۴۱- فرض کنید X_1 ، ... ، X_n مستقل با میانگین مشترک μ و واریانس مشترک σ^2 باشند، با قرار دادن $Y_n = X_n + Y_{n+1} + X_{n+2}$ برای $j \geq 0$ ، $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+j})$ را پیدا کنید.

۴۲- تابع چگالی توأم X و Y عبارت است از

$$f(x,y) = \frac{1}{y} e^{-(y+x/y)}, \; x > 0, \; y > 0$$

$E[X]$, $E[Y]$ را بیابید و نشان دهید که $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$.

۴۳- استخری شامل ۱۰۰ ماهی است که ۳۰ تای آنها ماهی قنات هستند. اگر ۲۰ ماهی بگیریم میانگین و واریانس تعداد ماهی قنات در بین این ۲۰ ماهی چیست؟ چه فرضی را طرح می کنید؟

۴۴- یک گروه از ۲۰ فرد ـ شامل ۱۰ مرد و ۱۰ زن ـ را بتصادف به ۱۰ زوج ۲ تایی مرتب می کنیم میانگین و واریانس تعداد زوجهایی را حساب کنید که شامل یک مرد و یک زن باشند. اکنون فرض کنید که ۲۰ فرد عبارت از ۱۰ زوج متأهل باشند میانگین و واریانس تعداد زوجهای متأهلی را که به صورت زوج دوتایی مرتب شده اند حساب کنید.

۴۵- فرض کنید X_1 ، X_2 ، ... ، X_n متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع پیوسته نامعلوم F باشند، و فرض کنید که Y_1 ، Y_2 ، ... ، Y_n متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع پیوسته نامعلوم G باشند. اکنون این $n + m$ متغیر را مرتب کنید و فرض کنید

$$I_i = \begin{cases} 1 & i \text{ امین کوچکترین از } m+n \text{ متغیر از نمونه } X \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

متغیر تصادفی $R = \sum_{i=1}^{n+m} iI_i$ مجموع رتبه نمونه X است و مبنای یک روش آماری استاندارد به نام آزمون مجموع رتبه های ویلککسن برای این آزمون که G, F همتوزیعند، می باشند. این آزمون فرض $F = G$ را وقتی R نه خیلی بزرگ و نه خیلی کوچک باشد می پذیرد. فرض کنید که فرضیهٔ تساوی در حقیقت درست باشد. میانگین و واریانس R

را بیابید.

(**راهنمایی** : نتایج مثال ۵ پ را به کار برید).

۴۶- دو روش متمایز برای ساختن یک کالای خاص وجود دارد. کیفیت کالای تولیدی با روش i یک متغیر تصادفی پیوسته با توزیع F_i ، $i = 1, 2$ ، است. فرض کنید n کالا با روش ۱ و m کالا با روش ۲ تولید شود. $n + m$ کالا را بر حسب کیفیت رتبه بندی کنید و فرض کنید

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر } j\text{امین بهترین با روش 1 تولید شده باشد} \\ 2 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای بردار X_1 ، X_2 ، ... ، X_{n+m} که شامل n تا 1 و m تا 2 است فرض کنید که R شمارهٔ تعداد گشتهای ۱ باشد به عنوان مثال، اگر n = ۵ و m = ۲ ، ۲ ، ۱ ، ۱ ، ۱ ، ۱ ، ۲ ، ۱ = X ، در این صورت R = ۲ . اگر $F_1 = F_2$ (یعنی ، کالاهای تولید شده با دو روش همتوزیعند) میانگین و واریانس R چیست؟

۴۷- اگر X_1 ، X_2 ، X_3 ، X_4 متغیرهای تصادفی (دو به دو) نا همبسته هریک با میانگین 0 و واریانس ۱ باشند، مطلوب است همبستگی

(الف) $X_1 + X_2$ و $X_2 + X_3$ ، و (ب) $X_1 + X_2$ و $X_3 + X_4$.

۴۸- بازی شرط بندی با تاس را به شرح زیر چنان که در بعضی تفریحگاهها بازی می شود درنظر بگیرید. بازیکنهای ۱ و ۲ به نوبت یک جفت تاس را پرتاب می کنند. سپس بانک تاسها را پرتاب می کند تا نتیجه را به شرح زیر تعیین کند؛ بازیکن i ، $i = 1,2$ ، می برد اگر نتیجه اش اکیداً بیشتر از نتیجه بانک باشد. فرض کنید برای $i = 1 , 2$

$$I_i = \begin{cases} 1 & i \text{ ببرد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و نشان دهید که I_1 و I_2 همبسته مثبتند. شرح دهید که چرا باید منتظر چنین نتیجه ای باشیم.

۴۹- یک تاس سالم را پی در پی پرتاب می کنیم. فرض کنید X ، Y به ترتیب نمایش تعداد پرتابهای لازم برای به دست آوردن ۶ و ۵ باشد. مطلوب است :

(الف) $E[X]$. (ب) $E[X|Y = 1]$. و (پ) $E[X|Y = 5]$.

۵۰- کیسه ای شامل ۴ توپ سفید و ۶ توپ سیاه است. متوالیاً دو نمونه تصادفی بدون

جایگذاری به ترتیب با حجم ۳ و ۵ از کیسه بیرون می آوریم. فرض کنید X , Y نمایش توپهای سفید در دو نمونه باشند. $E[X|Y = i]$ را برای $i = 1,2,3,4$ پیدا کنید.

۵۱ - چگالی توأم X , Y عبارت است از :

$$f(x, y) = \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y} \qquad 0 < x < \infty; 0 < y < \infty$$

$E[X^2|Y = y]$ را حساب کنید.

۵۲- چگالی توأم X و Y عبارت است از

$$f(x, y) = \frac{e^{-y}}{y} \qquad 0 < x < y, 0 < y < \infty$$

$E[X^3|Y = y]$ را حساب کنید.

۵۳- یک زندانی در سلولی که دارای ۳ در است محبوس است. اولین در به تونلی ختم می شود که او را پس از ۲ روز راه پیمایی به سلولش بر می گرداند. در دوم به تونلی منتهی می شود که پس از ۴ روز وی را به سلول بر می گرداند. در سوم پس از یک روز راه پیمایی منجر به فرار او می شود. اگر فرض شود که زندانی همواره درهای ۱، ۲، ۳ را به ترتیب با احتمالات ۰٫۵، ۰٫۳ و ۰٫۲ انتخاب می کند، میانگین روزها تا زمانی که زندانی فرار کند چقدر است؟

۵۴ - ده شکارچی منتظر پرواز مرغابیهایند. شکارچیها زمانی که دسته ای از مرغابیها بالای سرشان پرواز کنند در یک زمان شلیک می کنند، ولی هریک بتصادف هدفش را مستقل از دیگران انتخاب می کند. اگر هر شکارچی مستقلاً هدفش را با احتمال ۰٫۶ بزند، میانگین تعداد مرغابیهای شکار شده را حساب کنید. فرض کنید که تعداد مرغابیها در یک دسته متغیر تصادفی پواسن با میانگین ۶ باشد.

۵۵- تعداد افرادی که در طبقهٔ همکف وارد آسانسور می شوند متغیر تصادفی پواسن با میانگین ۱۰ است. اگر N طبقه بالای طبقهٔ همکف باشد و هر شخصی با احتمال مساوی در هریک از این طبقات مستقل از دیگران پیاده شود میانگین تعداد توقفهایی را که آسانسور قبل از تخلیه تمام افراد خواهد داشت حساب کنید.

۵۶- فرض کنید میانگین تعداد حوادث در هفته در یک منطقه صنعتی ۵ مورد باشد. همچنین فرض کنید که تعداد کارگران مصدوم در هر حادثه متغیر تصادفی مستقل با میانگین مشترک

۲٫۵ باشد. اگر تعداد کارگران مصدوم در هر حادثه مستقل از تعداد حادثه هایی که رخ می دهد باشد، میانگین تعداد کارگران مصدوم در هفته را حساب کنید.

۵۷ - در مثال ۶ پ واریانس طول زمان را تا لحظه ای که به سلامت معدنچی می انجامد حساب کنید.

۵۸ - بازی تمار با تاسها در مسأله ۱۰ فصل ۲ تعریف شد. مطلوب است:
(الف) میانگین، (ب) واریانس، تعداد پرتاب تاس ها تا آن که یک بازی قمار کامل گردد.

۵۹ - یک قمار باز که در هر بازی شرط را با احتمال p می برد و یا با احتمال $1 - p$ می بازد در نظر بگیرید. وقتی $p > \frac{1}{2}$، یک روش قمار بازی متداول، معروف به شیوهٔ کلی، آن است که همواره کسر $2p-1$ از دارایی موجود شما را شرط بندی می کنند. میانگین دارایی یک قمار باز که با x واحد شروع می کند و شیوهٔ کلی را به کار می برد پس از n بار قمار کردن پیدا کنید.

۶۰ - تعداد حوادثی که یک فرد در یک سال معین دارد متغیر تصادفی پواسن با میانگین λ است. ولی فرض کنید که مقدار X از فردی به فرد دیگر تغییر می کنند، برای ۶۰ درصد جامعه برابر ۲ و برای ۴۰ درصد دیگر برابر ۳ است. اگر فردی بتصادف انتخاب شود احتمال آن که در یک سال.
(الف) 0 حادثه، و (ب) دقیقاً ۳ حادثه داشته باشد چقدر است؟
احتمال شرطی آن که ۳ حادثه در سال داشته باشد به شرط آن که در سال قبل حادثه ای نداشته باشد چقدر است؟

۶۱- مسأله ۶۰ را وقتی که نسبتی از جامعه که دارای مقدار λ کمتر از x است برابر $1 - e^{-x}$ می باشد تکرار کنید.

۶۲- کیسه ای را که محتوی تعداد زیادی سکه است در نظر بگیرید و فرض کنید هر سکه وقتی پرتاب شود با احتمال p شیر می آید ولی این مقدار p از سکه ای به سکهٔ دیگر تغییر می کند. فرض کنید ساختار کیسه چنان است که اگر سکه ای بتصادف از آن انتخاب شود در این صورت مقدار p را می توان به عنوان مقدار متغیر تصادفی که روی $(0, 1)$ دارای توزیع یکنواخت است در نظر گرفت. اگر یک سکه بتصادف از کیسه انتخاب نموده و آن را دوبار پرتاب کنیم، مطلوب است احتمال آن که:
(الف) پرتاب اول شیر بیاید و (ب) هردو پرتاب شیر بیایند.

۶۳- در مثال ۷ ب فرض کنید S علامتی باشد که ارسال می شود و R علامت دریافت شده باشد .

(الف) $E[R]$ را حساب کنید .

(ب) $Var(R)$ را حساب کنید .

(پ) آیا R دارای توزیع نرمال است؟

(ت) $Cov(R, S)$ را بیابید .

۶۴- در مثال کمیت سنج ۷ پ فرض کنید که X دارای توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ است . اگر ناحیه گسسته شده با $a_2 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2}, a_0 = 0$ مشخص شود، کمیت سنج بهینهٔ Y را تعیین کنید و $E[(X-Y)^2]$ را حساب کنید .

۶۵- فرض کنید X متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد .

(الف) $E[(X-\mu)^3]$ را تعیین کنید .

(ب) با استفاده از قسمت (الف) $E[X^3]$ را بیابید .

(ج) جواب قسمت (ب) را با مشتق گیری از تابع مولد گشتاور بررسی کنید .

۶۶- تابع مولد گشتاور برای X به صورت $\phi_X(t) = \exp\{2e^t - 2\}$ و برای Y به صورت $\phi_Y(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}[3e^t + 1]^{10}$ است . اگر Y, X مستقل باشند. مطلوب است :

(الف) $P\{X + Y = 2\}$ ، (ب) $P\{XY = 0\}$ ، و (پ) $E[XY]$.

۶۷- دو تاس پرتاب می کنیم، فرض کنید X مقدار تاس اول و Y مجموع مقادیر دو تاس باشد . تابع مولد گشتاور توأم Y,X را حساب کنید .

۶۸- چگالی توأم X , Y عبارت است از

$$f(x, y) = \frac{e^{-x}e^{-y/x}}{x} \qquad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

(الف) تابع مولد گشتاور توأم X , Y را بیابید .

(ب) توابع مولد گشتاورهای منفرد را پیدا کنید .

فصل هشتم

قضایای حدی

۱ - مقدمه

قضایای حدی مهمترین نتایج نظری در نظریهٔ احتمال هستند. مهمترین این قضیه ها آنهایی هستند که تحت عنوان « قانون اعداد بزرگ» یا «قضایای حد مرکزی» رده بندی می شوند. معمولاً قضیه هایی به عنوان « قانون اعداد بزرگ » در نظر گرفته می شوند که بیانگر شرایطی باشند که تحت آن شرایط متوسط دنباله ای از متغیرهای تصادفی به متوسط مورد انتظار همگرا باشد. از طرف دیگر قضایای حدمرکزی به تعیین شرایطی مربوط می شوند که تحت آن شرایط، مجموع تعدادزیادی از متغیرهای تصادفی دارای توزیع احتمالی است که تقریباً نرمال است.

۲ - نا مساوی چبیشف و قانون ضعیف اعداد بزرگ

این بخش را با اثبات نتیجه ای که نا مساوی مارکف نامیده می شود شروع می کنیم

حکم ۲ - ۱ نا مساوی مارکف

اگر X یک متغیر تصادفی باشد که تنها مقادیر نامنفی را اختیار می کند در این صورت برای هر مقدار $a > 0$ داریم

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E[X]}{a}$$

برهان : اثبات را برای حالتی که X پیوسته با چگالی f است ارائه می کنیم .

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty xf(x)\,dx \\ &= \int_0^a xf(x)\,dx + \int_a^\infty xf(x)\,dx \\ &\geq \int_a^\infty xf(x)\,dx \\ &\geq \int_a^\infty af(x)\,dx \\ &= a\int_a^\infty f(x)\,dx \\ &= aP\{X \geq a\} \end{aligned}$$

(در حالت کلی اثبات دقیقاً با جایگزینی $dF(x)$ بجای $f(x)\,dx$ انجام می شود) .
حکم ۲-۲ را به عنوان یک نتیجه به دست می آوریم .

حکم ۲-۲ نا مساوی چبیشف

اگر X متغیری تصادفی با میانگین متناهی μ و واریانس σ^2 باشد آن گاه برای هر مقدار $k > 0$ داریم

$$P\{|X - \mu| \geq k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

برهان : چون $(X - \mu)^2$ یک متغیر تصادفی نا منفی است لذا برای حصول نا مساوی زیر می توانیم از نا مساوی مارکف با $(a = k^2)$ استفاده کنیم

$$P\{(X - \mu)^2 \geq k^2\} \leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{k^2} \tag{۲-۱}$$

اما چون $(x - \mu)^2 \geq k^2$ اگر و تنها اگر $|X - \mu| \geq k$ در نتیجه معادلهٔ (۲-۱) با

$$P\{|X - \mu| \geq k\} \leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2}$$

معادل بوده و اثبات کامل است .

اهمیت نا مساویهای مارکف و چبیشف در این است که ما را در به دست آوردن کران

احتمالها وقتی فقط میانگین یا میانگین و واریانس توزیع احتمال معلوم هستند کمک می کند. البته اگر توزیع واقعی معلوم باشد در آن صورت احتمال مورد نظر را دقیقاً می توان محاسبه کرد و نیازی به کرانهای فوق نیست.

مثال ۲ الف. فرض کنید که بدانیم تعداد اقلام تولید شده در یک کارخانه در طول یک هفته متغیر تصادفی با میانگین ۵۰ است.

۱- در مورد احتمال این که تولید این هفته از ۷۵ بیشتر شود چه می توان گفت؟

۲- اگر واریانس تولید یک هفته مساوی ۲۵ باشد در این صورت در مورد احتمال این که تولید این هفته بین ۴۰ و ۶۰ باشد چه می توان گفت؟

حل: فرض کنید X تعداد اقلامی باشد که در یک هفته تولید می شود.

۱- طبق نامساوی مارکف داریم

$$P\{X > 75\} \leq \frac{E[X]}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$$

۲- طبق نامساوی چبیشف داریم

$$P\{|X - 50| \geq 10\} \leq \frac{\sigma^2}{10^2} = \frac{1}{4}$$

بنابراین

$$P\{|X - 50| < 10\} \geq 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$$

در نتیجه احتمال تولید هفتگی بین ۴۰ و ۶۰ دست کم ۰/۷۵ است.

چون نامساوی چبیشف برای تمام توزیعهای متغیر تصادفی X معتبر است، در بیشتر حالات نمی توان انتظار داشت که کران احتمال به احتمال واقعی خیلی نزدیک باشد. برای روشن شدن مطلب به مثال ۲ ب توجه کنید.

مثال ۲ ب. اگر توزیع X در فاصله (0, 10) یکنواخت باشد آن گاه چون $E[X] = 5$ و $\text{Var} = \frac{25}{3}$، از نامساوی چبیشف نتیجه می شود

$$P\{|X - 5| > 4\} \leq \frac{25}{3(16)} \approx .52$$

در صورتی که نتیجهٔ درست عبارت است از

$$P\{|X - 5| > 4\} = .20$$

بنابراین گرچه نامساوی چبیشف درست است ولی کران بالایی که حاصل می شود به احتمال واقعی نزدیک نیست .

بطور مشابه اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آن گاه از نامساوی چبیشف نتیجه می شود

$$P\{|X-\mu|>2\sigma\}\le \tfrac{1}{4}$$

در صورتی که احتمال واقعی به صورت زیر داده می شود

$$P\{|X-\mu|>2\sigma\}=P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|>2\right\}=2[1-\Phi(2)]\approx .0456$$

نامساوی چبیشف اغلب به عنوان یک وسیلهٔ نظری در اثبات نتایج مورداستفاده قرارمی گیرد. این مطلب ابتدا به وسیلهٔ حکم ۲-۳ وسپس با اهمیت بیشتری به وسیلهٔ قانون ضعیف اعداد بزرگ تشریح می شود.

حکم ۲-۳

اگر $\mathrm{Var}(X)=0$ ، آن گاه

$$P\{X=E[X]\}=1$$

به بیان دیگر تنها متغیرهای تصادفی که واریانس صفر دارند آنهایی هستند که با احتمال ۱ ثابتند .

برهان : بنا به نا مساوی چبیشف برای هر $n\ge 1$ داریم

$$P\left\{|X-\mu|>\frac{1}{n}\right\}=0$$

با فرض $n\to\infty$ و استفاده از خاصیت پیوستگی احتمال داریم

$$0=\lim_{n\to\infty}P\left\{|X-\mu|>\frac{1}{n}\right\}=P\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{|X-\mu|>\frac{1}{n}\right\}\right\}$$
$$=P\{X\ne\mu\}$$

و نتیجه اثبات می شود.

قضیهٔ ۲-۱ قانون ضعیف اعداد بزرگ

فرض کنید X_1 ، X_2 ، . . . دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع باشند که هریک دارای میانگین متناهی $E[X_i]=\mu$ است . در این صورت برای هر $\varepsilon>0$

$$P\left\{\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right\}\to 0 \qquad \text{و} \quad n\to\infty$$

برهان : نتیجه را فقط با توجه به فرض اضافی که متغیرهای تصادفی دارای واریانس متناهی σ^2 هستند اثبات می کنیم . اکنون چون

$$E\left[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right]=\mu \qquad \text{و} \qquad \mathrm{Var}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{\sigma^2}{n}$$

از نامساوی چبیشف نتیجه می شود

$$P\left\{\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right\}\le\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

حال اگر $n\to\infty$ حکم ثابت می شود .

قانون ضعیف اعداد بزرگ ابتدا توسط یا کوب برنولی برای حالت ویژه ای که X_i ها متغیرهای تصادفی 1 - 0 (یعنی برنولی) هستند اثبات شد . اظهار نظر و اثبات این قضیه درکتاب « هنر حدس زدن» ارائه شده است که ۸ سال بعد از مرگ او در ۱۷۱۳ به وسیلهٔ نوه اش نیکولا برنولی منتشر شد . بایدتوجه کنیم که چون در آن زمان نا مساوی چبیشف ناشناخته بودبرنولی می بایست به روشی استادانه جهت اثبات نتیجه متوسل شود . شکل کلی قانون ضعیف اعداد بزرگ که در قضیه ۲-۱ ارائه شد توسط خین چین ریاضی دان روسی اثبات شده است .

۳- قضیه حد مرکزی

قضیهٔ حد مرکزی یکی از برجسته ترین نتایج در نظریه احتمال است . این قضیه بطور نادقیق بیان می کند که توزیع مجموع تعداد زیادی از متغیرهای تصادفی مستقل تقریباً نرمال است . بنابراین نه تنها روش ساده ای را برای محاسبهٔ تقریبی احتمالهای مجموع متغیرهای تصادفی مستقل فراهم می کند بلکه در بیان این حقیقت بارز که فراوانیهای تجربی جامعه های بسیا ر زیادی منحنیهای زنگی شکل (یعنی نرمال) هستند نیز به ما کمک می کند .

ساده ترین شکل قضیهٔ حد مرکزی به صورت زیر است :

قضیه ۳-۱ قضیهٔ حد مرکزی

فرض کنید X_1 ، X_2 ، . . . ، X_n دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع با

میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، در این صورت توزیع

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

وقتی $n \to \infty$ به نرمال استاندارد میل می کند. یعنی

$$P\left\{\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le a\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}\,dx \quad \text{و} \quad n \to \infty$$

کلید اثبات قضیهٔ حد مرکزی لم زیر است که آن را بدون اثبات بیان می کنیم.

لم ۳-۱

فرض کنید Z_1 ، Z_2 ، . . . دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با توابع توزیع F_{Z_n} و توابع مولد گشتاور ϕ_{Z_n} ، $n \ge 1$ باشد و فرض کنید Z یک متغیر تصادفی دارای تابع توزیع F_Z و تابع مولد گشتاور ϕ_Z باشد. اگر برای هر t ، $\phi_{Z_n}(t) \to \phi_Z(t)$ در آن صورت به ازای هر t که $F_Z(t)$ پیوسته باشد $F_{Z_n}(t) \to F_Z(t)$.

اگر Z را متغیر تصادفی نرمال استاندارد فرض کنیم آن گاه چون $\phi_{Z_n}(t) = e^{t^2/2}$ از لم ۳-۱ نتیجه می شود که اگر $\phi_{Z_n}(t) \to e^{t^2/2}$ در این صورت وقتی $n \to \infty$ ، $F_{Z_n}(t) \to \phi(t)$.

حال می خواهیم قضیهٔ حد مرکزی را اثبات کنیم.

اثبات قضیهٔ حد مرکزی: ابتدا فرض می کنیم که $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$. با توجه به این فرض که تابع مولد گشتاور X_i یعنی $\phi(t)$ وجود دارد و متناهی است قضیه را اثبات می کنیم. چون تابع مولد گشتاور $\frac{X_i}{\sqrt{n}}$ برابر است با

$$\phi_{X_i/\sqrt{n}}(t) = E\left[\exp\left\{\frac{tX_i}{\sqrt{n}}\right\}\right]$$
$$= \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

بنابراین تابع مولد گشتاور $\sum_{i=1}^{n} X_i / \sqrt{n}$ عبارت است از

$$\phi_{\sum_{i=1}^{n} X_i/\sqrt{n}}(t) = \left[\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

فرض کنید

$$L(t) = \log \phi(t)$$

و توجه داشته باشید که

$$
\begin{aligned}
L(0) &= 0 \\
L'(0) &= \frac{\phi'(0)}{\phi(0)} \\
&= \mu \\
&= 0 \\
L''(0) &= \frac{\phi(0)\phi''(0) - [\phi'(0)]^2}{[\phi(0)]^2} \\
&= E[X^2] \\
&= 1
\end{aligned}
$$

اکنون برای اثبات قضیه باید نشان دهیم که وقتی $n \to \infty$ ، $[\phi(t/\sqrt{n})]^n \to e^{t^2/2}$ یا بطور معادل نشان دهیم که وقتی $n \to \infty$ ، $nL(t/\sqrt{n}) \to t^2/2$. برای اثبات این مطلب توجه می کنیم که

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{L(t/\sqrt{n})}{n^{-1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{-L'(t/\sqrt{n})n^{-3/2}t}{-2n^{-2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{L'(t/\sqrt{n})t}{2n^{-1/2}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{-L''(t/\sqrt{n})n^{-3/2}t^2}{-2n^{-3/2}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[L''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{2}\right] \\
&= \frac{t^2}{2}
\end{aligned}
$$

بنابر این در حالت $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$ قضیهٔ حد مرکزی ثابت می شود. حال اگر متغیرهای تصادفی استاندارد شدهٔ $X_i^* = (X_i - \mu)/\sigma$ را در نظر گرفته و نتیجهٔ بالا را به کار بریم مطلوب در حالت کلی عاید می شود زیرا ، $E[X^*_i] = 0$ ، $Var(X^*_i) = 1$.

تبصره : قضیه ۳-۱ گرچه فقط بیان می کند که برای هر a

$$P\left\{\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le a\right\}\to\Phi(a)$$

در واقع می توان نشـــان داد کـــه همگرایی در a یکنواخت است. [$f_n(a)\to f(a)$ را یکنواخت گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ یک N وجود داشته باشد، بطوری که وقتی $n>N$، برای هر a داشته باشیم $|f_n(a)-f(a)|<\varepsilon$].

اولین جنبهٔ قضیهٔ حد مرکزی توسط دو موآور در حدود سال ۱۷۳۳ برای حالت ویژه ای که X_i ها متغیرهای تصادفی برنولی با $p=\frac{1}{2}$ هستند اثبات شد. و سپس به وسیلهٔ لاپلاس برای حالت دلخواه p اثبات گردید. (چون یک متغیر تصادفی دوجمله ای را می توان به صورت مجموع n متغیر تصادفی برنولی مستقل همتوزیع در نظر گرفت لذا این مطلب تقریب نمودن دوجمله ای را با نرمال که در بخش ۳-۱ فصل ۵ ارائه شد تأیید می کند) . لاپلاس شکل کلی تر قضیهٔ حد مرکزی را که در قضیهٔ ۳-۱ داده شده نیز کشف نمود. مع هذا اثبات او کاملاً دقیق نبود و در واقع آن را بسهولت نمی توان دقیق نمود. ابتدا لیاپانف ریاضیدان روسی در سالهای ۱۹۰۱ - ۱۹۰۲ اثبات دقیقی از قضیه حد مرکزی ارائه نمود.

مثال ۳ الف. یک منجم می خواهد فاصلهٔ یک ستارهٔ دور را از رصدخانه اش بر حسب سال نوری اندازه گیری کند گرچه منجم یک روش اندازه گیری دارد و می داند که به علت تغییر شرایط جوی و خطای نرمال هر زمان که یک اندازه گیری انجام می شود او فاصلهٔ دقیق را به دست نخواهد آورد بلکه صرفاً یک برآورد را پیدا می کند. در نتیجه منجم اقدام به یک سری اندازه گیریها نموده و سپس از مقدار متوسط اندازه گیریهایش به عنوان مقدار برآورد فاصلهٔ واقعی استفاده می کند. اگر منجم باور کند که مقادیر اندازه گیریها متغیرهای مستقل همتوزیع با میانگین مشترك d (فاصلهٔ واقعی) و واریانس مشترك ۴ سال نوری است برای این که مطمئن شود که دقت فاصلهٔ ای که بر آورد کرده بین ۰٫۵ ± سال نوری است به چند اندازه گیری نیاز دارد؟

حل: فرض کنید منجم تصمیم دارد n مشاهده داشته باشد. اگر X_1، X_2، . . . ، X_n، n اندازه مطلوب باشد با توجه به قضیهٔ حد مرکزی

$$Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-nd}{2\sqrt{n}}$$

توزیع آن تقریباً یک نرمال استاندارد است . بنابراین

$$P\left\{-.5 \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - d \leq .5\right\} = P\left\{-.5\frac{\sqrt{n}}{2} \leq Z_n \leq .5\frac{\sqrt{n}}{n}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - 1$$

پس اگر برای مثال، منجم بخواهد ۹۵ درصد مطمئن باشد که مقدار برآورد او تا ۰٫۵ سال نوری دقت داشته باشد باید n^* اندازه گیری انجام دهد ، بطوری که

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n^*}}{4}\right) - 1 = .95 \quad \text{یا} \quad \Phi\left(\frac{\sqrt{n^*}}{4}\right) = .975$$

و بنابر این از جدول ۵-۱ فصل ۵ داریم

$$\frac{\sqrt{n^*}}{4} = 1.96 \quad \text{یا} \quad n^* = (7.84)^2 = 61.47$$

چون مقدار n^* صحیح نیست باید ۶۲ مشاهده را انتخاب کند .

مع هذا باید توجه کنیم که تجزیه و تحلیل قبلی با توجه به این فرض انجام گرفته است که تقریب نرمال وقتی $n = 62$ ، تقریب خوبی است . گرچه معمولاً چنین است بطور کلی سؤال میزان بزرگ بودن n که باید قبل از «خوبی» تقریب باشد به توزیع X_i بستگی دارد . اگر منجم نگران این نکته باشد و بخواهد شانس را در نظر نگیرد هنوز می تواند مسأله اش را با استفاده از نا مساوی چبیشف حل کند؛ چون

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right] = d \qquad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right) = \frac{4}{n}$$

از نا مساوی چبیشف نتیجه می شود که

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} - d\right| > .5\right\} \leq \frac{4}{n(.5)^2} = \frac{16}{n}$$

بنابر این اگر $n = \frac{16}{0.05} = 320$ مشاهده تهیه کند می تواند ۹۵ درصد مطمئن باشد که بر آورد او تقریباً تا ۰٫۵ سال نوری دقت دارد .

مثال ۳ ب . تعداد دانشجویانی که در درس روان شناسی ثبت نام می کنند یک متغیر تصادفی پواسن با میانگین ۱۰۰ است . استادی که این درس را می دهد تصمیم می گیرد که اگر

تعداد ثبت نام کنندگان ۱۲۰ یا بیشتر باشد درس را در دو گروه جداگانه تدریس نماید در صورتی که اگر این تعداد کمتر از ۱۲۰ دانشجو باشد برای تمام دانشجویان در یک گروه تدریس خواهد نمود. احتمال این که این استاد مجبور به تدریس دو گروه باشد چقدر است؟

حل: جواب دقیق $e^{-100} \sum_{i=120}^{\infty} (100)^i / i!$ بآسانی یک پاسخ عددی را به دست نمی دهد. مع هذا اگر خاطرنشان کنیم که یک متغیر تصادفی پواسن با میانگین ۱۰۰ مجموع ۱۰۰ متغیر تصادفی است که هریک میانگین ۱ دارند با استفاده از قضیه حد مرکزی می توان یک جواب تقریبی به دست آورد. اگر X تعداد دانشجویان ثبت نام کرده را نشان دهد داریم

$$
\begin{aligned}
P\{X \geq 120\} &= P\left\{\frac{X-100}{\sqrt{100}} \geq \frac{120-100}{\sqrt{100}}\right\} \\
&\approx 1-\Phi(2) \\
&= .0228
\end{aligned}
$$

در این جا از این حقیقت استفاده نموده ایم که واریانس یک متغیر تصادفی پواسن برابر با میانگین آن است.

مثال ۳ پ. اگر ۱۰ تاس متعادل را پرتاب کنیم مطلوب است احتمال تقریبی این که مجموع حاصل بین ۳۰ و ۴۰ باشد.

حل: فرض کنید X_i مقدار تاس i ام، $i = 1,2, \ldots, 10$ را نشان دهد. چون $E(X_i) = \frac{7}{2}$ و $\mathrm{Var}(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = \frac{35}{12}$ از قضیه حد مرکزی داریم

$$
\begin{aligned}
P\left\{30 \leq \sum_{i=1}^{10} X_i \leq 40\right\} &= P\left\{\frac{30-35}{\sqrt{\frac{350}{12}}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 35}{\sqrt{\frac{350}{12}}} \leq \frac{40-35}{\sqrt{\frac{350}{12}}}\right\} \\
&\approx 2\Phi(\sqrt{6/7})-1 \\
&\approx .65
\end{aligned}
$$

مثال ۳ ت: فرض کنید X_i، $i = 1,2, \ldots, 10$، متغیرهای تصادفی مستقل باشند که هریک دارای توزیع یکنواخت در $(0, 1)$ هستند. یک تقریب برای $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i > 6\right\}$ محاسبه کنید.

حل: چون $E[X_i] = \frac{1}{12}$ و $\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{2}$ بنا به قضیهٔ حد مرکزی داریم

$$P\left\{\sum_{1}^{10} X_i > 6\right\} = P\left\{\frac{\sum_{1}^{10} X_i - 5}{\sqrt{10(\frac{1}{12})}} > \frac{6-5}{\sqrt{10(\frac{1}{12})}}\right\}$$
$$\approx 1 - \Phi(\sqrt{1.2})$$
$$\approx .16$$

بنابر این تنها در ۱۶ درصد موارد $\sum_{i=1}^{10} X_i$ بزرگتر از ۶ است.

هنگامی که X_i ها متغیرهای تصادفی مستقل ولی لزوماً همتوزیع نیستند قضیهٔ حدمرکزی همچنین وجود دارد. جنبه‌ای از این قضیه که به هیچ وجه کلی ترین آن نیست به شرح زیر است.

قضیه ۳-۲ قضیهٔ حد مرکزی برای متغیرهای تصادفی مستقل

فرض کنید X_1 ، X_2 ، . . . دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقلند که میانگینها و واریانسهای آنها به ترتیب $\mu_i = E[X_i]$ ، $\sigma^2_i = \text{Var}(X_i)$ است. اگر

(الف) X_i ها بطور یکنواخت کران دار باشند، یعنی اگر برای یک مقدار M و به ازای هر i داشته باشیم $P\{|X_i| < M\} = 1$ و (ب) $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \infty$ آن گاه

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}} \leq a\right\} \to \Phi(a)$$ وقتی $n \to \infty$

۴ - قانون قوی اعداد بزرگ

قانون قوی اعداد بزرگ احتمالاً مشهورترین نتیجه درنظریهٔ احتمال است. این قانون بیان می کند که متوسط دنباله ای ازمتغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع با احتمال ۱ به میانگین توزیع همگراست.

قضیهٔ ۴-۱ قانون قوی اعداد بزرگ

فرض کنید X_1 , X_2 , . . . دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع باشد که هریک

میانگین متناهی $\mu = E[X_i]$ دارند. در این صورت وقتی $n \to \infty$ با احتمال ۱ داریم[1].

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to \mu \qquad \text{و} \qquad n \to \infty$$

به عنوان کاربردی از قانون قوی اعداد بزرگ فرض کنید دنباله ای از آزمایشهای مستقل در یک آزمون تجربی را انجام داده ایم. فرض کنید E پیشامد ثابتی از تجربه باشد و P(E) احتمال رخ دادن E در هر آزمایش ویژه باشد. با فرض

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } E \text{ در آزمایش } i\text{ام رخ دهد} \\ 0 & \text{اگر } E \text{ در آزمایش } i\text{ام رخ ندهد} \end{cases}$$

طبق قانون قوی اعداد بزرگ با احتمال ۱ داریم

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to E[X] = P(E) \tag{۱-۴}$$

چون $X_1 + \dots + X_n$ تعداد دفعاتی است که پیشامد E در n آزمایش اول رخ می دهد می توانیم معادلهٔ (۴-۱) را به این صورت بیان کنیم که با احتمال ۱ حد نسبت دفعاتی که پیشامد E رخ می دهد برابر P(E) است.

یکی از عوامل کلیدی در اثبات قانون قوی اعداد بزرگ نا مساوی کلموگروف است که دارای اهمیت ویژه ای است.

لمّ ۴-۲ نامساوی کلموگروف

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که $E[X_i] = 0$ و $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$ ، $i = 1, \ldots, n$ در این صورت برای هر $a > 0$ داریم

$$P\left\{\max_{i=1,\ldots,n} |X_1 + \cdots + X_i| > a\right\} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i^2}{a^2}$$

---

۱ - یعنی قانون قوی اعداد بزرگ بیان می کند که

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} (X_1 + \cdots + X_n)/n = \mu\right\} = 1$$

برهان: فرض می کنیم متغیر تصادفی N کمترین مقدار i ، $i \leq n$ ، باشد ، بطوری که $(X_1 + \ldots + X_i)^2 > a^2$ ، باشد و اگر برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ ، $(X_1 + \ldots + X_i)^2 \leq a^2$ آن را مساوی n تعریف می کنیم . یعنی تعریف می کنیم .

$$\begin{array}{ll} N = 1 & X_1 > a^2 \\ N = 2 & X_1^2 \leq a^2 \quad \text{و} \quad (X_1 + X_2)^2 > a^2 \\ \vdots & \\ N = i & X_1^2 \leq a^2, \ldots, (X_1 + \cdots + X_{i-1})^2 \leq a^2, (X_1 + \cdots + X_i)^2 > a^2 \\ \vdots & \\ N = n & (X_1 + \cdots + X_i)^2 \leq a^2, i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{array}$$

اکنون چون دو پیشامد

$$\left\{ \max_{i=1,\ldots,n} (X_1 + \cdots + X_i)^2 > a^2 \right\} \qquad \text{و} \qquad \{(X_1 + \cdots + X_N)^2 > a^2\}$$

معادلند از نا مساوی مارکف نتیجه می شود که

$$P\left\{ \max_{i=1,\ldots,n} (X_1 + \cdots + X_i)^2 > a^2 \right\} = P\{(X_1 + \cdots + X_N)^2 > a^2\} \leq \frac{E[(X_1 + \cdots + X_N)^2]}{a^2} \tag{۲-۴}$$

اگر بتوانیم نشان دهیم که

$$E[(X_1 + \cdots + X_N)^2] \leq E[(X_1 + \cdots + X_n)^2]$$

آن گاه نتیجه از معادلهٔ (۴-۲) حاصل می شود زیرا

$$\begin{aligned} E[(X_1 + \cdots + X_n)^2] &= \mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \end{aligned}$$

برای اثبات این نا مساوی روی N شرط می گذاریم و ابتدا توجه می کنیم که

$$E[(X_1 + \cdots + X_n)^2 | N = n] = E[(X_1 + \cdots + X_N)^2 | N = n]$$

برای $i < n$ ،

$$\begin{aligned}E[(X_1+\cdots+X_n)^2|N=i]&\\ =E[((X_1+\cdots+X_i)+(X_{i+1}+\cdots+X_n))^2|N=i]&\\ =E[(X_1+\cdots+X_i)^2|N=i]&\\ +2E[(X_1+\cdots+X_i)(X_{i+1}+\cdots+X_n)|N=i]&\\ +E[(X_{i+1}+\cdots+X_n)^2|N=i]&\end{aligned} \tag{۳-۴}$$

حال پیشامد $\{N=i\}$ اطلاعاتی درمورد X_1 ، . . . ، X_i داردزیرا بیان می‌کندکه $X_1^2 \le a^2$ ، . . . ، $(X_1+\ldots+X_{i-1})^2 \le a^2$ ، $(X_1+\ldots+X_i)^2 > a^2$ ، ولی از طرف دیگر درمورد مقادیر $X_{i+1}, \ldots, X_n$ چیزی را بیان نمی کند. بنابراین چون تمام متغیرهای تصادفی X_1 ، ... ، X_n مستقلند نتیجه می شود که $X_1+\ldots+X_i$ و $X_{i+1}+\ldots+X_n$ با معلوم بودن $N=i$ بطور مشروط مستقل باقی می مانند. بنابر این،

$$\begin{aligned}E[(X_1+\cdots+X_i)(X_{i+1}+\cdots+X_n)|N=i]&\\ =E[X_1+\cdots+X_i|N=i]E[X_{i+1}+\cdots+X_n|N=i]&\\ =E[X_1+\cdots+X_i|N=i]E[X_{i+1}+\cdots+X_n]&\\ =0&\end{aligned}$$

بنابراین از معادلهٔ (۴-۳) به دست می آید

$$\begin{aligned}E[(X_1+\cdots+X_n)^2|N=i]&\ge E[(X_1+\cdots+X_i)^2|N=i]\\ &=E[(X_1+\cdots+X_N)^2|N=i]\end{aligned}$$

لذا مشاهده می کنیم که برای تمام مقادیر N

$$E[(X_1+\cdots+X_n)^2|N]\ge E[(X_1+\cdots+X_N)^2|N]$$

اگر امید ریاضی بگیریم عبارت زیر نتیجه می شود

$$E[(X_1+\cdots+X_n)^2]\ge E[(X_1+\cdots+X_N)^2]$$

و نتیجه از معادلهٔ (۴-۲) حاصل می گردد.

نامساوی کلموگروف را به عنوان یک تعمیم نا مساوی چبیشف می توان تلقی نمود. زیرا اگر X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آن گاه با فرض $n=1$ در نا مساوی کلموگروف به دست می آوریم

$$P\{|X-\mu|>a\}\le\frac{\sigma^2}{a^2}$$

که البته همان نامساوی چبیشف است. با وجود این باید توجه کنیم که نا مساوی کلموگروف نتیجه ای قویتر از نا مساوی چبیشف است، زیرا اگر X_1 ، . . . . X_n متغیرهای تصادفی مستقل با

$E[X_i]=0$ ، $Var(X_i)=\sigma^2_i$ باشد آن گاه نا مساوی چبیشف نتیجه می دهد

$$P\{|X_1+\cdots+X_n|>a\}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_i^2}{a^2}$$

در صورتی که نا مساوی کلموگرف همان کران را برای احتمال مجموعه ای بزرگتر ، مثلاً

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{|X_1+\cdots+X_i|>a\}$$

می دهد .

اکنون از نامساوی کلموگروف به عنوان مبنای اثبات قانون قوی اعداد بزرگ در حالتی که متغیرهای تصادفی مستقل فرض شده ولی الزاماً همتوزیع نیستند استفاده می شود . قبل از ارائه این اثبات نیاز به حکم زیر است که به لم کرونکر معروف بوده و آن را بدون اثبات بیان می کنیم

حکم ۳-۱ لم کرونکر

اگر a_1 ، a_2 ، . . . اعداد حقیقی بوده بطوری که $\sum_{1}^{\infty}\frac{a_i}{i}<\infty$ آن گاه

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n}=0$$

قضیه ۳ - ۳ قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی مستقل

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ متغیرهای تصادفی مستقل با $E[X_i]=0$ و $Var(X_i)=\sigma^2_i$ باشد. اگر $\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i^2/i^2<\infty$ آن گاه با احتمال ۱ وقتی $n\to\infty$ داریم

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\to 0 \qquad و \quad n\to\infty$$

برهان : بنابر نا مساوی کلموگروف برای هر n و هر $a>0$ نتیجه می شود که

$$P\left\{\max_{j=1,\ldots,n}\left|\sum_{i=1}^{j}\frac{X_i}{i}\right|>a\right\}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}Var(X_i/i)}{a^2}\le\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i^2/i^2}{a^2} \qquad (۴-۴)$$

اگر E_n ، $n\ge 1$ را با

$$E_n = \left\{ \max_{j=1,\dots,n} \left| \sum_{i=1}^{j} \frac{X_i}{i} \right| > a \right\}$$

تعریف کنیم در آن صورت چون پیشامدهای E_n افزایشی هستند بنا به خاصیت پیوستگی احتمالها نتیجه می شود که

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = P\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_n\right) = P\left\{ \max_{j=1,2..} \left| \sum_{i=1}^{j} \frac{X_i}{i} \right| > a \right\}$$

بنابر این از معادلهٔ (۴-۴) ملاحظه می کنیم

$$P\left\{ \max_{j=1,2\dots} \left| \sum_{i=1}^{j} \frac{X_i}{i} \right| > a \right\} \le \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 / i^2}{a^2}$$

یا معادل با آن

$$P\left\{ \max_{j\ge 1} \left| \sum_{i=1}^{j} \frac{X_i}{i} \right| \le a \right\} \ge 1 - \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 / i^2}{a^2} \qquad (۵-۴)$$

بنابراین چون از $\max_{j\ge 1} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{i} \right| \le a$ ، $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{i} \le a < \infty$ نتیجه می شود لذا از معادلهٔ (۴ - ۵) عبارت زیر حاصل می گردد

$$P\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{i} < \infty \right\} \ge 1 - \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 / i^2}{a^2}$$

اگر $a \to \infty$ در می یابیم که

$$P\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{i} < \infty \right\} = 1$$

بنابراین با به کاربردن لم کرونکر عبارت زیر حاصل شده و اثبات کامل می گردد.

$$P\left\{ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} X_i / n = 0 \right\} = 1$$

اگر متغیرهای تصادفی نه تنها مستقل بلکه همتوزیع با میانگین μ و واریانس متناهی σ^2 نیز فرض کنیم آن گاه چون $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma^2 / i^2 < \infty$ لذا با احتمال ۱ نتیجه می شود

$$\lim_{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)}{n} = 0$$

یا بطور معادل

$$\lim_{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = \mu$$

بنابراین قضیهٔ ۴-۳ یک اثبات قانون قوی اعداد بزرگ را در حالت متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع (i . i . d) با واریانسهای متناهی فراهم می کند. در واقع با استفادهٔ از آن می توان قانون قوی اعداد بزرگ را برای متغیرهای تصادفی i . i . d حتی وقتی واریانس نامتناهی است اثبات نمود و بنابراین قضیهٔ ۴-۱ اثبات می شود.

بسیاری از دانشجویان ابتدا در تفاوت بین قانون ضعیف و قوی اعداد بزرگ دچار مشکل می شوند. قانون ضعیف اعداد بزرگ بیان می کند که برای هر مقدار بزرگ ثابت n مثلاً n^* ، $\frac{X_1 + \dots + X_{n^*}}{n^*}$ احتمالاً نزدیک μ است. مع هذا این بیان نمی کند که $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ محدود است به این که برای کلیهٔ مقادیر n بزرگتر از n^* نزدیک به μ باقی بماند. بنابراین امکان این که مقادیر بزرگ $|(X_1 + \dots + X_n)/n - \mu|$ بتوانند اغلب بطور نامتناهی (گرچه در فاصله های اتفاقی) رخ دهند بدون جواب باقی می ماند. قانون قوی ثابت می کند که این حالت نمی تواند رخ دهد. بویژه ثابت می کند که با احتمال ۱ برای هر مقدار مثبت ε

$$\left|\sum_{1}^{n} \frac{X_i}{n} - \mu\right|$$

تنها تعداد متناهی از دفعات بزرگتر از ε خواهد بود.

قانون قوی اعداد بزرگ ابتدا در حالت ویژهٔ متغیرهای تصادفی برنولی توسط بورل ریاضی دان فرانسوی اثبات شد. مشکل کلی قانون قوی که در قضیهٔ ۴-۱ ارائه شد توسط آ. ان. کلموگروف ریاضی دان روسی به اثبات رسید.

۵- نا مساویهای دیگر

گاهی اوقات با وضعیتهایی مواجه می شویم که علاقه مندیم یک کران بالا برای احتمالی

به شکل $P\{X-\mu>a\}$ که a مقداری است مثبت و وقتی فقط میانگین $\mu=E[X]$ و واریانس $\sigma^2=Var(X)$ توزیع X معلوم‌مند به دست آوریم. البته چون $X>\mu>a>0$ ، $|X-\mu|>a$ را نتیجه می دهد لذا از نا مساوی چبیشف وقتی $a>0$ است عبارت زیر حاصل می گردد

$$P\{X-\mu>a\}\le P\{|X-\mu|>a\}\le\frac{\sigma^2}{a^2} \quad \text{هرگاه} \quad a>0$$

با وجود این بطوری که حکم زیر نشان می دهد به این نتیجه می رسیم که می توانیم کار را بهتر انجام دهیم .

حکم ۵-۱ نامساوی چبیشف یك طرفه

اگر X متغیری تصادفی با میانگین 0 و واریانس متناهی σ^2 باشد آن گاه برای هر $a>0$ داریم

$$P\{X>a\}\le\frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$$

برهان : چون $0=E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xd(x)$ نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned}-a&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)\,dF(x)\\&\ge\int_{-\infty}^{a}(x-a)\,dF(x)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}a&\le\int_{-\infty}^{a}(a-x)\,dF(x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}(a-x)I_a(x)\,dF(x)\end{aligned} \qquad (۱-۵)$$

که

$$I_a(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\le a\\0 & \text{if } x>a\end{cases}$$

وقتی $a>0$ است با مربع کردن دوطرف معادلهٔ (۵-۱) به دست می آوریم

$$a^2\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}(a-x)I_a(x)\,dF(x)\right)^2$$

یا معادل با آن

$$a^2 \leq (E[(a-X)I_a(X)])^2 \tag{۵-۲}$$

حال از نامساوی مشهور کوشی ـ شوارتز استفاده می کنیم که بیان می کند برای هر دو متغیر تصادفی Y و Z داریم

$$(E[YZ])^2 \leq E[Y^2]E[Z^2]$$

مشروط به این که طرف راست متناهی باشد (اثبات نا مساوی کوشی ـ شوارتز در تمرین نظری ۲۹ فصل ۷ داده شده است). بنابراین اگر نا مساوی کوشی - شوارتز را برای طرف راست معادلهٔ (۵ - ۲) با $Y=(a-X)$ و $Z=I_a(X)$ به کار ببریم حاصل خواهد شد

$$\begin{aligned}
a^2 &\leq E[(a-X)^2]E[I_a^2(X)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(a-x)^2\,dF(x)\int_{-\infty}^{a}dF(x) \\
&= F(a)\int_{-\infty}^{\infty}(a-x)^2\,dF(x) \\
&= F(a)\left[\int_{-\infty}^{\infty}a^2\,dF(x) - 2a\int_{-\infty}^{\infty}x\,dF(x) + \int_{-\infty}^{\infty}x^2\,dF(x)\right] \\
&= F(a)(a^2+\sigma^2)
\end{aligned}$$

بنابر این

$$F(a) \geq \frac{a^2}{a^2+\sigma^2}$$

یا معادل با آن

$$P\{X>a\} = 1-F(a) \leq 1-\frac{a^2}{a^2+\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}$$

و نتیجه اثبات می شود.

مثال ۵ الف. اگر تعداد اقلام تولید شده در کارخانه ای در طول یک هفته متغیری تصادفی با میانگین ۱۰۰ و واریانس ۴۰۰ باشد یک کران بالا برای احتمال این که این هفته تولید از ۱۲۰ تجاوز کند به دست آورید.

حل : از نا مساوی یک طرفهٔ چبیشف نتیجه می شود

$$P\{X > 120\} = P\{X - 100 > 20\} \le \frac{400}{400 + (20)^2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین احتمال این که تولید این هفته از ۱۲۰ تجاوز کند حداکثر $\frac{1}{2}$ است.

اگر بخواهیم با به‌کاربردن نا مساوی مارکف کرانی به‌دست آوریم در آن صورت

$$P\{X > 120\} \le \frac{E(X)}{120} = \frac{5}{6}$$

که نسبت به کران قبلی کرانی ضعیفتر است حاصل می شود.

اکنون فرض کنید X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 است. چون μ - X و $\mu - X$ هر دو دارای میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند از نا مساوی یک طرفهٔ چبیشف برای $a > 0$، داریم

$$P\{X - \mu > a\} \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

و

$$P\{\mu - X > a\} \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

بنابراین نتیجهٔ زیر حاصل می شود

نتیجهٔ ۵-۱

اگر $E\{X\} = \mu$، $Var(X) = \sigma^2$ آن گاه برای $a > 0$ داریم

$$P\{X > \mu + a\} \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

$$P\{X < \mu - a\} \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

مثال ۵ ب. مجموعهٔ ۲۰۰ نفری متشکل از ۱۰۰ مرد و ۱۰۰ زن را بتصادف به ۱۰۰ زوج دو تایی تقسیم می کنیم. یک کران بالا برای این احتمال که کمتر از ۳۰ زوج شامل یک مرد و یک زن است پیدا کنید.

حل : مـردان را به دلخـواه از ۱ تـا ۱۰۰ شمـاره گـذاری می کنیـم و فـرض کنیـد بـرای $i = 1, 2, \ldots, 100$.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگـر مـرد } i \text{ با یـک زن زوج شـده باشـد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت X یعنی تعداد زوجهای مرد ـ زن را به صورت زیر می توان بیان کرد

$$X = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

چون مـرد i با احـتـمـال مـسـاوی زوج هریک از ۱۹۹ نفـر دیگر کـه ۱۰۰ نفـر آن زن است می باشد داریم

$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{100}{199}$$

بطور مشابه برای $i \neq j$ ،

$$E[X_iX_j] = P\{X_i = 1, X_j = 1\}$$
$$= P\{X_i = 1\}P\{X_j = 1 | X_i = 1\} = \frac{100}{199}\frac{99}{197}$$

که $P\{X_j = 1 | X_i = 1\} = \frac{99}{197}$ ، زیرا با این شـرط کـه مـرد i زوج یک زن است، مـرد j با احتمال مساوی زوج هریک از ۱۹۷ نفر باقیمانده است که ۹۹ نفر آن زن هستند . بنابراین

$$E[X] = \sum_{i=1}^{100} E[X_i]$$
$$= (100)\frac{100}{199}$$
$$= 50.25$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{100} \text{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum \text{Cov}(X_i, X_j)$$
$$= 100\frac{100}{199}\frac{99}{199} + 2\binom{100}{2}\left[\frac{100}{199}\frac{99}{197} - \left(\frac{100}{199}\right)^2\right]$$
$$= 25.126$$

بنا به نا مساوی چبیشف

$$P\{X < 30\} \le P\{|X - 50.25| > 20.25\} \le \frac{25.126}{(20.25)^2} = .061$$

و بنابراین در ۱۰۰ تا کمتر از ۶ شانس وجود دارد که کمتر از ۳۰ مرد با زن زوج شوند، مع هذا با استفاده از نا مساوی یکطرفهٔ چبیشف که نتیجهٔ زیر را عاید می کند می توانیم آن را بهتر کنیم،

$$\begin{aligned} P\{X < 30\} &= P\{X < 50.25 - 20.25\} \\ &\le \frac{25.126}{25.126 + (20.25)^2} \\ &= .058 \end{aligned}$$

نا مساوی بعد به جای احتمالات با امید ریاضی انجام می شود. قبل از این که آن را بیان کنیم تعریف زیر لازم است.

تعریف

تابع حقیقی $f(x)$ را که دارای مشتق اول و دوم است محدب می گویند اگر برای هر x، $f''(x) > 0$ باشد بطور مشابه اگر به ازای هر x، $f''(x) \le 0$ باشد آن را مقعر می گویند.

برای $f(x) = -x^{1/n}, f(x)' = e^{ax}, f(x) = x^2, x \ge 0$ مثالهایی از توابع محدب هستند. اگر $f(x)$ محدب باشد آن گاه $g(x) = -f(x)$ مقعر خواهد بود و بالعکس.

حکم ۵-۲ نا مساوی جنسن

اگر $f(x)$ تابعی محدب باشد آن گاه .

$$E[f(X)] \ge f(E[X])$$

به شرطی که امید ریاضی وجود داشته و متناهی باشد.

برهان: اگر بسط سری تیلور $f(x)$ را حول $\mu = E[X]$ بنویسیم داریم

$$f(x) = f(\mu) + f'(\mu)(x - \mu) + \frac{f''(\xi)(x - \xi)^2}{2}$$

که در آن ξ مقداری بین x و μ است. چون $f''(\xi) \ge 0$ است

$$f(x) \ge f(\mu) + f'(\mu)(x - \mu)$$

بنابراین

$$f(X) \geq f(\mu) + f'(\mu)(X - \mu)$$

اگر امید ریاضی بگیریم

$$E[f(X)] \geq f(\mu) + f'(\mu)E[X - \mu] = f(\mu)$$

و نا مساوی ثابت می شود.

مثال ۵ پ. یک سرمایه گذار با انتخابهای زیر مواجه است: او می تواند تمام سرمایه اش را در یک جای مخاطره آمیز بگذارد که به یک برگشت تصادفی X که دارای میانگین m است منتهی می شود یا او می تواند سرمایه اش را به یک معاملهٔ بدون مخاطره بزند که منتهی به برگشت m با احتمال ۱ می شود. فرض کنید تصمیم او بر مبنای ماکزیمم کردن میانگین $u(R)$ است، که در آن R پول برگشتی و u تابع «مطلوبیت» است باشد. بنا به نا مساوی جنسن نتیجه می شود که اگر u تابعی مقعر باشد آن گاه $E[u(X)] \leq u(m)$ و بنابر این مورد بی خطر بودن ترجیح داده می شود در صورتی که اگر u محدب باشد آن گاه $E[u(x)] \geq u(m)$ و لذا سرمایه گذاری با خطر ترجیح داده می شود.

تمرینهای نظری

۱ - اگر σ^2 واریانس X باشد آن گاه σ ریشهٔ دوم مثبت واریانس **انحراف معیار** نامیده می شود. اگر X دارای میانگین μ و انحراف معیار σ باشد نشان دهید

$$P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$$

۲ - اگر X دارای میانگین μ و انحراف معیار σ باشد نسبت $r \equiv |\mu| / \sigma$ نسبت اندازهٔ علامت به اغتشاش X نامیده می شود. منظور این است که X را می توان به صورت $X = \mu + (X - \mu)$ بیان نمود که μ علامت و $X - \mu$ اغتشاش را نشان می دهد. اگر $D \equiv |(X - \mu) / \mu|$ را به عنوان انحراف نسبی X از علامتش (یا میانگین) μ تعریف کنیم نشان دهید برای $\alpha > 0$

$$P\{D \leq \alpha\} \geq 1 - \frac{1}{r^2 \alpha^2}$$

۳- اندازهٔ نسبت علامت به اغتشاش یعنی $\frac{|\mu|}{\sigma}$ که $\mu = E[X]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ متغیرهای تصادفی زیر را محاسبه کنید.

(الف) پواسن با میانگین λ

(ب) دو جمله ای با پارامترهای n , p

(پ) هندسی با میانگین $\frac{1}{p}$

(ت) یکنواخت در (a, b)

(ث) نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$

(ج) نرمال با پارامترهای μ , σ^2.

۴- فرض کنید Z_n ، $n \geq 1$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی و c ثابتی باشد که برای هر $\varepsilon > 0$ وقتی $n \to \infty$ ، $P\{|Z_n - c| > \varepsilon\} \to 0$ نشان دهید که برای هرتابع پیوسته کران دار g وقتی $n \to \infty$

$$E[g(Z_n)] \to g(c) \text{ و } n \to \infty$$

۵- فرض کنید $f(x)$ تابع پیوسته ای باشد که برای $0 \leq x \leq 1$ تعریف می شود ؛ توابع

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

(که چند جمله ایهای برنشتاین نامیده می شود) را در نظر بگیرید و ثابت کنید

$$\lim_{n \to \infty} B_n(x) = f(x)$$

راهنمایی : فرض کنید X_1 ، X_2 ، . . . متغیرهای تصادفی برنولی مستقل با میانگین x باشد. نشان دهید

$$B_n(x) = E\left[f\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)\right]$$

و سپس (با استفاده از نتیجهٔ تمرین نظری ۴) از واقعیت زیر استفاده کنید

چون می توان ثابت کرد که همگرایی $B_n(x)$ به $f(x)$ در x یکنواخت است موضوع بالا یک اثبات احتمالی قضیهٔ مشهور وایرشتراس در آنالیز را می دهد که بیان می کند هر تابع پیوسته در یک فاصلهٔ بسته را می توان با یک چند جمله ای با دقت دلخواه تقریب نمود.

۶- فرض کنید X_1 ، X_2 ، . . . دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل باشد. فرض کنید $E[X_i] = 0$ و $\operatorname{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ و فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i^2}{n^2} = 0$$

ثابت کنید برای هر $\varepsilon > 0$ وقتی $n \to \infty$ داریم

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \to 0$$

با استفاده از این اگر Y_i ، $i \geq 1$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی باشد آن گاه برای هر $\varepsilon > 0$ وقتی $n \to \infty$.

$$P\left\{\left|\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} - P(n)\right| \leq \varepsilon\right\} \to 1$$

که در آن $E[Y_i] = P_i$ و $P(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{n}$.

۷- فرض کنید X_1 ، X_2 ، . . . متغیرهای تصادفی (احتمالاً وابسته) باشند بطوری که $E[X_j] = \mu_j$ ، $\operatorname{Var}(X_j) = \sigma_j^2$ ، $j = 1, \ldots, n$ ، ثابت کنید که برای هر $t > 0$ داریم

$$P\left\{\left|\frac{X_j - \mu_j}{\sigma_j}\right| \leq \sqrt{n}\, t \qquad j = 1, \ldots, n\right\} \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

۸- (الف) فرض کنید X متغیر تصادفی گسسته ای است که مقادیر ممکن آن 1 ، 2 ، . . . است. اگر $P\{X = k\}$ در $k = 1, 2, \ldots$ نا افزایشی باشد، ثابت کنید

$$P(X = k) \leq 2\frac{E[X]}{k^2}$$

(ب) فرض کنید متغیر تصادفی پیوستهٔ نا منفی X دارای یک تابع چگالی نا افزایشی است. نشان دهید

$$f(x) \leq \frac{2E[X]}{x^2}$$

برای هر $x > 0$

۹- فرض کنید یک تاس متعادل را ۱۰۰ مرتبه انداخته ایم. فرض کنید X_i مقدار به دست آمده

در پرتاب i ام باشد. یک تقریب برای

$$P\left\{\prod_{1}^{100} X_i \le a^{100}\right\} \qquad 1 < a < 6$$

پیدا کنید.

۱۰- توضیح دهید که چرا یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای (t, λ) وقتی t بزرگ است تقریباً دارای توزیع نرمال است.

۱۱- ثابت کنید قانون قوی اعداد بزرگ برای هنگامی که $E(X_i) = +\infty$ معتبر است.

راهنمایی : برای M معلوم تعریف کنید

$$X_i^M = \begin{cases} X_i & X_i \le M \\ M & X_i > M \end{cases}$$

از (الف) قانون قوی اعداد بزرگ روی دنبالهٔ X_i^M ، $i \ge 1$ ؛

(ب) این حقیقت که $X_i^M \le X_i$ و

(پ) فرض $M \to \infty$

استفاده کنید.

۱۲- فرض کنید یک سکهٔ متعادل را ۱۰۰۰ مرتبه پرتاب کرده‌ایم. اگر نتیجهٔ ۱۰۰ پرتاب اول شیر باشد چه نسبتی از شیرها را در ۹۰۰ پرتاب آخر انتظار دارید؟ نظر خود را درمورد عبارتی که «قانون اعداد بزرگ فراگیر است ولی موازنه نمی کند» بنویسید.

۱۳- اگر $E[X] < 0$ و $\theta \ne 0$ طوری باشد که $E[e^{\theta X}] = 1$ ، نشان دهید $\theta > 0$.

مسائل

۱- فرض کنید میانگین و واریانس متغیر تصادفی X برابر ۲۰ باشد. در مورد $P\{0 \le X \le 40\}$ چه می توان گفت؟

۲- استادی از تجربهٔ گذشته خود می داند که نمرهٔ آزمون یک دانشجو در امتحان پایانی متغیری است تصادفی با میانگین ۷۵.

(الف) یک کران بالا برای احتمال این که نمرهٔ آزمون دانشجو از ۸۵ تجاوز کند، پیدا کنید.
علاوه بر این فرض کنید استاد می داند که واریانس نمرهٔ آزمون دانشجو برابر ۲۵ است.
(ب) در مورد این احتمال که نمرهٔ دانشجو بین ۶۵ و ۸۵ است چه می توان گفت؟
(پ) چند دانشجو باید در امتحان شرکت کنند تا مطمئن شویم که با احتمال دست کم ۰٫۹ متوسط کلاس بین ۷۰ و ۸۰ است. از قضیهٔ حد مرکزی استفاده نکنید.

۳- برای حل بخش (پ) مسألهٔ ۲ از قضیه حد مرکزی استفاده کنید.

۴- فرض کنید X_1 ، . . . ، X_{20} متغیرهای تصادفی مستقل پواسن با میانگین ۱ باشد.
(الف) با استفاده از نا مساوی مارکف یک کران برای $P\left\{\sum_1^{20} X_I > 15\right\}$ را به دست آورید.
(ب) با استفاده از قضیهٔ حد مرکزی $P\left\{\sum_1^{10} x_i > 15\right\}$ را تقریب کنید.

۵- پنجاه عدد را به نزدیکترین عدد صحیح گرد نموده و سپس آنها را جمع می کنیم. اگر هریک از خطاهای گرد شده در فاصلهٔ (۰٫۵ و ۰٫۵-) دارای توزیع یکنواخت باشند احتمال این که اختلاف مجموع نتیجه شده از مجموع واقعی بیشتر از ۳ باشد چقدر است؟

۶- تاسی را مرتباً پرتاب می کنیم تا مجموع تمام پرتابها بیشتر از ۳۰۰ شود. احتمال این که حداقل ۸۰ پرتاب لازم باشد چقدر است؟

۷- صد لامپ برق که طول عمر آنها نمایی مستقل با میانگین ۵ ساعت است وجود دارد. اگر در هر زمان یک لامپ را مورد استفاده قرار دهیم و بلافاصله لامپ جدیدی را جایگزین لامپ خراب کنیم، احتمال این که بعد از ۵۲۵ ساعت یک لامپ در حال کار کردن باشد چقدراست؟

۸ - اگر در مسأله ۷ فرض کنیم زمان تعویض لامپ تصادفی و در فاصلهٔ (۰٫۵ و ۰) دارای توزیع یکنواخت است، احتمال این که تا ساعت ۵۵۰ ام تمام لامپها خراب باشند چقدر است؟

۹ - اگر X یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای $(n, 1)$ باشد n چقدر بزرگ باشد تا

$$P\{|X/n - 1| > .01\} < .01$$

۱۰ - مهندسان راه و ساختمان بر این باورند که W مقدار وزنی (به واحدهای ۱۰۰۰ پوند) که دهانهٔ یک پل می تواند تحمل کند بدون این که به ساختمان زیانی وارد شود دارای توزیع نرمال با میانگین ۴۰۰ و انحراف معیار ۴۰ است. فرض کنید وزن (به واحدهای

۱۰۰۰ پوند) یک اتومبیل متغیری تصادفی با میانگین ۳ و انحراف معیار ۰/۳ است. برای این که احتمال زیان ساختمانی از ۰/۱ تجاوز نماید چند اتومبیل باید روی دهانهٔ پل باشند؟

۱۱- بیشتر مردم باور دارند که تغییر روزانهٔ قیمت موجودی یک کمپانی در بازار متغیری است تصادفی با میانگین 0 و واریانس σ^2. یعنی اگر Y_n قیمت موجودی در روز n ام باشد آن گاه

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n \qquad n \geq 1$$

که X_1، X_2، . . . متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع با میانگین 0 و واریانس σ^2 است. فرض کنید که قیمت موجودی امروز ۱۰۰ باشد. اگر $\sigma^2 = 1$ باشد در مورد احتمال این که در ۱۰ روز بعد قیمت موجودی همواره بین ۹۵ و ۱۰۵ باقی بماند چه می توان گفت؟

۱۲- صد قطعه داریم که آنها را بطورمتوالی مورداستفاده قرار می دهیم. یعنی قطعه ۱ را مورد استفاده قرارداده وبعد از این که خراب شد قطعهٔ ۲راجایگزین نموده به همین ترتیب الی آخر. اگر طول عمر قطعهٔ i دارای توزیع نمایی با میانگین $10 + i / 10$، $i = 1, \ldots, 100$ باشد، این احتمال را که طول عمر تمام قطعه ها از ۱۲۰۰ تجاوز کند برآورد نمایید. حال اگر توزیع طول عمر قطعهٔ i در فاصلهٔ $(0, 20 + i / 5)$، $i = 1, \ldots, 100$ یکنواخت باشد برآورد را به دست آورید.

۱۳- با این فرض که توزیع تعداد زوجهای مرد ـ زن (تقریباً) نرمال است، مثال ۵ ب را دوباره انجام دهید. آیا این فرض معقول به نظر می رسد؟

۱۴- بخش (الف) مسألهٔ ۲ را وقتی واریانس نمرهٔ آزمون دانشجو برابر ۲۵ است تکرار کنید.

۱۵- دریاچه ای ۴ نوع ماهی دارد. فرض کنید صید هریک از این نوع ماهیها با احتمال مساوی انجام شود. فرض کنید Y تعداد ماهیهایی است که لازم است دست کم یکی از هرنوع باشد.

(الف) فاصله (a, b) را طوری تعیینی کنید که $P\{a \leq Y \leq b\} \geq 0.90$.

(ب) با استفاده از نا مساوی یک طرفهٔ چبیشف، در طرح صید ماهیها چند ماهی لازم است تا دست کم ۹۰ درصد مطمئن باشیم که لااقل یکی از هر نوع به دست می آوریم؟

۱۶- اگر X متغیر تصادفی نا منفی با میانگین ۲۵ باشد راجع به موارد زیر چه می توان گفت؟

(الف) $E[X^3]$;

(ب) $E[\sqrt{X}]$;

(پ) $E[\log X]$;

(ت) $E[e^{-X}]$?

۱۷- فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی است؛ ثابت کنید

$$E[X] \le (E[X^2])^{1/2} \le (E[X^3])^{1/3} \le \cdots$$

۱۸- آیا نتایج مثال ۵ پ وقتی سرمایه گذار اجازه داشته باشد که سرمایه اش را تقسیم کند و کسر α ، $0 < \alpha < 1$ از آن را در وضعیت مخاطره آمیز و بقیهٔ آن را در معاملهٔ بدون خطر قرار دهد، تغییر می کند؟ برگشت سرمایهٔ او برای یک چنین تقسیم بندی سرمایه عبارت است از

$$R = \alpha X + (1 - \alpha)m$$

فصل نهم

چند موضوع دیگر احتمال

۱ - فرایند پواسن

قبل از تعریف فرایند پواسن یادآور می شویم که اگر $\lim_{h \to 0} f(h) / h = 0$ باشد تابع f را o (h) می نامند . یعنی اگر برای مقادیر کوچک f (h), h نسبت به h کوچک باشد، f, o (h) است . حال فرض کنید که «پیشامدها» در نقاط زمانی تصادفی رخ می دهند و فرض کنید N (t) تعداد پیشامدهایی باشد که در فاصلهٔ زمانی [0, t] اتفاق می افتد . فرآیند تصادفی $\{N(t), t \geq 0\}$ یک **فرایند پواسن** نامیده می شود هرگاه

(i) $N(0) = 0$

(ii) تعداد پیشامدهایی که در فواصل زمانی جدا اتفاق می افتند مستقل باشند

(iii) توزیع تعداد پیشامدهایی که در فاصلهٔ معلومی رخ می دهد تنها به طول آن فاصله بستگی داشته باشد نه به محل آن

(iv) $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$

(v) $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

بنابراین شرط (i) بیان می کنند که فرآیند در زمان 0 شروع می شود. شرط (ii) یعنی **فرض نمو مستقل** برای مثال بیان می کند که تعداد پیشامدها تا زمان t [یعنی N (t)] مستقل از تعداد پیشامدهایی است که بین t و t + s [یعنی N (t + s) - N (t)] اتفاق می افتد. شرط (iii) یعنی **فرض**

نمو ایستا بیان می کند که توزیع احتمال $N(t+s) - N(t)$ برای تمام مقادیر t یکسان است .

در فصل ۴ بحثی را بر این مبنا ارائه کردیم که توزیع پواسن جنبهٔ حدی توزیع دو جمله ای است . از شرط بالا نتیجه می شود که $N(t)$ دارای توزیع پواسن با میانگین λt است . اکنون این نتیجه را با روشی دیگر به دست می آوریم .

لم ۱-۱

برای یک فرایند پواسن با نرخ λ داریم

$$P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

برهان : فرض کنید $P_0(t) = P\{N(t) = 0\}$. برای $P_0(t)$ یک معادلهٔ دیفرانسیل به روش زیر به دست می آوریم :

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P\{N(t+h) = 0\} \\ &= P\{N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\} \\ &= P\{N(t) = 0\}P\{N(t+h) - N(t) = 0\} \\ &= P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)] \end{aligned}$$

که دو معادلهٔ آخر از فرض (ii) و این حقیقت که از فرضهای (iii) و (iv) $P\{N(h)=0\} = 1 - \lambda h + o(h)$ نتیجه می شود به دست می آیند . بنابراین

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}$$

حال اگر $h \to 0$

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

یا معادل آن

$$\frac{P_0'(t)}{P_0(t)} = -\lambda$$

به دست می آید که با انتگرال گیری

$$\log P_0(t) = -\lambda t + c$$

یا

$$P_0(t) = Ke^{-\lambda t}$$

نتیجه می شود. چون $P_0(0) = P\{N(0) = 0\} = 1$ لذا نتیجهٔ زیر عاید می گردد.

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

برای یک فرایند پواسن زمان اولین پیشامد را با T_1 نمایش می دهیم. به علاوه فرض کنید T_n برای $n > 1$ زمان منقضی شدهٔ بین پیشامد $(n-1)$ و n ام را نشان دهد. دنبالهٔ $\{T_n, n = 1, 2, \ldots\}$ را دنبالهٔ فواصل زمانی مراجعه ها می نامند. برای مثال اگر $T_1 = 5$ و $T_2 = 10$ باشد در این صورت اولین پیشامد فرایند پواسن در زمان ۵ و پیشامد دوم در زمان ۱۵ اتفاق افتاده است.

حال توزیع T_n را به دست می آوریم. برای انجام آن توجه داریم که پیشامد $\{T_1 > t\}$ فقط و فقط زمانی رخ می دهدکه هیچ پیشامدی از فرایندپواسن درفاصلهٔ $[0, t]$ اتفاق نیفتاده باشدو لذا

$$P\{T_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

بنابراین T_1 دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ است. اکنون

$$P\{T_2 > t\} = E[P\{T_2 > t | T_1\}]$$

با وجود این

$$\begin{aligned} P\{T_2 > t | T_1 = s\} &= P\{0 \text{ پیشامد در } (s, s+t] | T_1 = s\} \\ &= P\{0 \text{ پیشامد در } (s, s+t]\} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

که دو معادلهٔ آخر از نموهای مستقل و ایستا نتیجه می شود. بنابراین از بالا نتیجه می گیریم که T_2 نیز یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ بوده و علاوه بر این T_2 مستقل از T_1 است. اگر استدلال مشابه را تکرار کنیم حکم ۱-۱ حاصل می گردد.

حکم ۱ - ۱

T_1 و T_2 و . . . متغیرهای تصادفی نمایی هریک با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ است.

کمیت مورد توجه دیگر S_n، زمان ورود پیشامد n ام است که **زمان انتظار** تا پیشامد n ام نیز نامیده می شود. بسهولت دیده می شود که

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \qquad n \geq 1$$

و بنابر این از حکم ۱-۱ و نتایج بخش ۲ فصل ۵ نتیجه می شود که S_n دارای توزیع گاما با پارامترهای n و λ است، یعنی چگالی احتمال S_n بصورت زیر داده می شود

$$f_{S_n}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad x \geq 0$$

اکنون می خواهیم ثابت کنیم که $N(t)$ یک متغیر تصادفی پواسن با میانگین λt است.

قضیهٔ ۱-۱

برای یک فرآیند پواسن با نرخ λ داریم

$$P\{N(t) = n\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

برهان: توجه داریم که پیشامد n ام فرآیند پواسن قبل یا در زمان t اتفاق می افتد اگر و تنها اگر تعداد پیشامدهایی که تا زمان t رخ می دهند دست کم n باشد. یعنی

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t$$

و بنابر این

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\} \\ &= P\{S_n \leq t\} - P\{S_{n+1} \leq t\} \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} dx \end{aligned}$$

لیکن اگر در فرمول انتگرال جزء به جزء $\int u dv = uv - \int v du$ قرار دهیم $u = e^{-\lambda x}$ و $dv = \lambda [(\lambda x)^{n-1}/(n-1)!] dx$ نتیجهٔ زیر عاید می شود که اثبات را کامل می کند

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} + \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} dx$$

۲- زنجیرهای مارکف

دنباله ای از متغیرهای تصادفی X_0 ، X_1 ، . . . را در نظر بگیرید و فرض کنید مجموعهٔ

مقادیر ممکن این متغیرهای تصادفی $\{0,1,\ldots,M\}$ است. اگر X_n را به عنوان حالت یک سیستم در زمان n تفسیر کنیم، مفید خواهد بود و بر طبق این تفسیر اگر $X_n = i$ باشد سیستم را در زمان n در حالت i گویند.

دنباله متغیرهای تصادفی یک **زنجیر مارکف** تشکیل می دهد، وقتی که سیستم در حالت i است هرگاه احتمال ثابتی که آن را P_{ij} می نامند وجود داشته باشد که بعد از آن سیستم در حالت j باشد. یعنی برای تمام $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j$ داشته باشیم

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = P_{ij}$$

مقادیر P_{ij} $0 \leq i \leq M$, و $0 \leq j \leq M$ را احتمالهای انتقال زنجیر مارکف نامیده و این مقادیر در

$$P_{ij} \geq 0 \qquad \sum_{j=0}^{M} P_{ij} = 1 \qquad i = 0, 1, \ldots, M$$

صدق می کند (چرا؟).

بهتر است که احتمالهای انتقال P_{ij} را در آرایشی به شکل زیر که آن را **ماتریس** می نامند مرتب کنیم.

$$\begin{Vmatrix} P_{00} & P_{01} \cdots P_{0M} \\ P_{10} & P_{11} \cdots P_{1M} \\ \vdots & \\ P_{M0} & P_{M1} \cdots P_{MM} \end{Vmatrix}$$

دانش مربوط به ماتریس احتمال انتقال و توزیع X_0، بطور نظری ما را در محاسبهٔ تمام احتمالهای مورد نظر کمک می کند. برای مثال تابع جرم احتمال توأم X_0 ، . . . ، X_n به صورت زیر داده می شود

$$\begin{aligned} P\{X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} \\ = P\{X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\} P\{X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\} \\ = P_{i_{n-1}, i_n} P\{X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\} \end{aligned}$$

و اگر این استدلال را بطور پیوسته تکرار کنیم عبارت بالا برابر می شود با

$$= P_{i_{n-1}, i_n} P_{i_{n-2}, i_{n-1}} \cdots P_{i_1, i_2} P_{i_0, i_1} P\{X_0 = i_0\}$$

مثال ۲ الف. فرض کنید باریدن باران در فردا تنها از طریق این که آیا امروز باران می بارد یا نمی بارد به شرایط قبل هوا بستگی داشته باشد. علاوه بر این فرض کنید که اگر امروز باران

ببارد آن گاه فردا با احتمال α باران خواهد بارید و اگر امروز بارانی نباشد آن گاه فردا با احتمال β باران خواهد آمد.

اگر وقتی بارانی است سیستم در حالت 0، و وقتی بارانی نیست در حالت ۱ باشد در این صورت مورد بالا یک زنجیر مارکف دو حالتی است و ماتریس احتمال انتقال آن به صورت زیر است

$$\begin{Vmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{Vmatrix}$$

یعنی $P_{00} = \alpha = 1 - P_{01}$ ، $P_{10} = \beta = 1 - P_{11}$.

مثال ۲ ب. قمار بازی را در نظر بگیرید که در هر بازی یک واحد را با احتمال $P - 1$ می بازد. اگر فرض کنیم که وقتی سرمایهٔ قمارباز به 0 یا M برسد بازی را ترك کند در این صورت دنباله سرمایه های قمارباز یک زنجیر مارکف با احتمالهای انتقال زیر است

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1} \qquad i = 1, \ldots, M-1$$
$$P_{00} = P_{MM} = 1$$

مثال ۲ پ. فیزیک دانهای P و T یک الگوی فرضی را برای حرکت مولکولهایی که در آن M مولکول در میان دو ظرف توزیع شده اند در نظر می گیرند. در هر نقطهٔ زمانی یکی از مولکولها بتصادف انتخاب و از یک ظرف به ظرف دیگر منتقل می شود. اگر X_n تعداد مولکولهای اولین ظرف بلافاصله بعد از تعویض n ام باشد آن گاه $\{X_0, X_1, \ldots\}$ یک زنجیر مارکف با احتمالهای انتقال زیر است

$$P_{i,i+1} = \frac{M-i}{M} \qquad 0 \le i \le M$$

$$P_{i,i-1} = \frac{i}{M} \qquad 0 \le i \le M$$

$$P_{ij} = 0 \qquad \text{if } |j-i| > 1$$

بنابراین برای یک زنجیر مارکف P_{ij} احتمالی را نشان می دهد که یک سیستم در انتقال بعد از حالت i به حالت j وارد می شود. همچنین می توانیم احتمال انتقال دومرحله ای $P^{(2)}_{ij}$ که یک سیستم فعلاً در حالت i بعد از دو انتقال اضافی در حالت j خواهد بود؛ یعنی

$$P_{ij}^{(2)} = P\{X_{m+2} = j | X_m = i\}$$

$P_{ij}^{(2)}$ را از P_{ij} به طریق زیر می توان محاسبه نمود

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(2)} &= P\{X_2 = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^{M} P\{X_2 = j, X_1 = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^{M} P\{X_2 = j | X_1 = k, X_0 = i\} P\{X_1 = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^{M} P_{kj} P_{ik} \end{aligned}$$

بطور کلی احتمالهای انتقال n مرحله ای را که به $P_{ij}^{(n)}$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می کنیم

$$P_{ij}^{(n)} = P\{X_{n+m} = j | X_m = i\}$$

حکم ۲-۱ که به معادلات چپمن- کلموگروف مشهور است طریقهٔ محاسبهٔ $P_{ij}^{(n)}$ را نشان می دهد.

حکم ۲-۱ معادلات چپمن- کلموگروف

برای تمام nها

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} P_{ik}^{(r)} P_{kj}^{(n-r)} \qquad \text{و} \qquad 0 < r < n$$

برهان

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)} &= P\{X_n = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k} P\{X_n = j, X_r = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k} P\{X_n = j | X_r = k, X_0 = i\} P\{X_r = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k} P_{kj}^{(n-r)} P_{ik}^{(r)} \end{aligned}$$

مثال ۲ ت. گام برداری تصادفی.شکل خاصی از زنجیر مارکف که دارای یک فضای حالت

نامتناهی شمار است گام برداری تصادفی نام دارد که حرکت یک ذره را در طول یک محور یک بعدی دنبال می کند . فرض کنید در هر لحظه از زمان ذره به ترتیب با احتمالهای p و p -1 یک قدم به راست یا به چپ حرکت کند . یعنی فرض کنید مسیر ذره از یک زنجیر مارکف با احتمالهای انتقال زیر پیروی کنند

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1} \qquad i = 0, \pm 1, \ldots$$

اگر ذره در حالت i است آن گاه احتمال این که بعد از n انتقال در حالت j باشد برابر است با احتمالی که $\frac{(n-i+j)}{2}$ از این قدمها به راست و $n - [(n-i+j)/2] = \frac{(n+i-j)}{2}$ قدم به چپ باشد . چون هر قدم به راست با احتمال p ، مستقل از قدمهای دیگر است لذامورد بالا احتمال دوجمله ای زیر است

$$P_{ij}^n = \binom{n}{\frac{n-i+j}{2}} p^{(n-i+j)/2}(1-p)^{(n+i-j)/2}$$

که در آن $\binom{n}{x}$ را وقتی x یک عدد صحیح نا منفی کمتر یا مساوی n نباشد 0 در نظر می گیریم . احتمال بالا را به صورت زیر می توان نوشت

$$P_{i,i+2k}^{2n} = \binom{2n}{n+k} p^{n+k}(1-p)^{n-k} \qquad k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$$

$$P_{i,i+2k-1}^{2n+1} = \binom{2n+1}{n+k+1} p^{n+k+1}(1-p)^{n-k}$$
$$k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n, -(n+1)$$

اگرچه $P_{ij}^{(n)}$ احتمالهای شرطی را نشان می دهد ولی با مقید کردن حالت اولیه از آنها می توانیم عباراتی برای احتمالهای غیر شرطی به دست آوریم . برای مثال

$$\begin{aligned} P\{X_n = j\} &= \sum_i P\{X_n = j \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\} \\ &= \sum_i P_{ij}^{(n)} P\{X_0 = i\} \end{aligned}$$

برای تعداد زیادی از زنجیرهای مارکف وقتی $n \to \infty$ ، $P_{ij}^{(n)}$ به یک مقدار Π_j که فقط به j بستگی دارد همگراست . یعنی برای مقادیر بزرگ n احتمال این که بعد از n انتقال بدون در نظر گرفتن حالت اولیه درحالت j باشیم، تقریباً برابر Π_j است . می توان نشان دادکه یک شرط

کافی برای هر زنجیر مارکف که دارای این خاصیت است آن است که برای $n > 0$ داشته باشیم.

$$P_{ij}^{(n)} > 0 \qquad i, j = 0, 1, \ldots, M \tag{۲-۱}$$

زنجیرهای مارکفی که درمعادلهٔ (۲-۱) صدق کنند **ارگودیک** نامیده می شوند. چون از حکم ۲-۱

$$P_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{M} P_{ik}^{(n)} P_{kj}$$

حاصل می شود لذا با فرض $n \to \infty$ ، برای زنجیرهای ارگودیک داریم

$$\Pi_j = \sum_{k=0}^{M} \Pi_k P_{kj} \tag{۲-۲}$$

علاوه بر این چون $\sum_{j=0}^{M} P_{ij}^{(n)} = 1$ با فرض این که $n \to \infty$ عبارت زیر را نیز به دست می آوریم

$$\sum_{j=0}^{M} \Pi_j = 1 \tag{۲-۳}$$

در حقیقت می توان نشان داد که $0 \le j \le M, \Pi_j$ جوابهای نا منفی یکتای معادلات (۲-۲) و (۲-۳) هستند. تمام اینها قضیهٔ ۲-۱ که آن را بدون اثبات بیان می کنیم خلاصه می شود.

قضیهٔ ۲ - ۱

برای یک زنجیر مارکف ارگودیک

$$\Pi_j = \lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)}$$

وجود دارد و Π_j ، $0 \le j \le M$ جوابهای نامنفی یکتای

$$\Pi_j = \sum_{k=0}^{M} \Pi_k P_{kj}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \Pi_j = 1$$

هستند.

مثال ۲ ث. مثال ۲الف را در نظر می گیریم: در آن مثال فرض شده بود که اگر امروز باران ببارد در آن صورت فردا با احتمال α خواهد بارید و اگر امروز باران نیاید آن گاه فردا با احتمال β خواهد بارید. از قضیهٔ ۲-۱ نتیجه می گیریم که احتمالهای حدی باریدن و نباریدن یعنی Π_0 و Π_1 عبارتند از

$$\Pi_0 = \alpha\Pi_0 + \beta\Pi_1$$
$$\Pi_1 = (1-\alpha)\Pi_0 + (1-\beta)\Pi_1$$
$$\Pi_0 + \Pi_1 = 1$$

که عبارات زیر را نتیجه می دهد

$$\Pi_0 = \frac{\beta}{1+\beta-\alpha} \qquad \Pi_1 = \frac{1-\alpha}{1+\beta-\alpha}$$

برای مثال اگر $\alpha = ۰/۶$ ، $\beta = ۰/۳$ آن گاه احتمال حدی این که در روز n ام باران بیاید برابر $\Pi_0 = \frac{۳}{۷}$ است.

کمیت Π_j نیز مساوی نسبت دفعات در دراز مدت است که زنجیر مارکف در حالت j، $j = 0, \ldots, M$ است. برای این که بطور شهودی دلیل آن را بدانیم فرض کنید P_j نسبت دفعاتی را نشان می دهد که در درازمدت زنجیر در حالت j است. (با استفاده از قانون قوی می توان ثابت کرد که برای یک زنجیر ارگودیک چنین نسبتی وجود دارد و ثابت است). اکنون چون P_k نسبت دفعاتی است که زنجیر در حالت k است و چون وقتی در حالت k زنجیر با احتمال P_{kj} به حالت j می رود نتیجه می شود نسبت دفعاتی که زنجیر مارکف از حالت k به حالت j واردمی شودبرابر $P_k P_{kj}$ است. باجمع کردن روی تمام k ها نشان داده می شود که P_j یعنی نسبت دفعاتی که زنجیر مارکف به حالت j وارد می شود در عبارت زیر صدق می کند.

$$P_j = \sum_k P_k P_{kj}$$

چون درستی $\sum_j P_j = 1$ واضح است بنابراین چون بنا به قضیهٔ ۲-۱ ، Π_j, $j = 0, \ldots, M$, جوابهای یکتای بالا هستند لذا

$$P_j = \Pi_j, \; j = 0, \ldots, M$$

مثال ۲ ج. فرض کنید در مثال ۲ پ علاقه مند به نسبت دفعاتی هستیم که j مولکول درظرف ۱ $(j = 0, \ldots, M)$ است. بنا به قضیهٔ ۲-۱ این کمیتها جواب یکتای

$$\Pi_0 = \Pi_1 \times \frac{1}{M}$$

$$\Pi_j = \Pi_{j-1} \times \frac{M-j+1}{M} + \Pi_{j+1} \times \frac{j+1}{M}, \qquad j = 1, \ldots, M$$

$$\Pi_M = \Pi_{M-1} \times \frac{1}{M}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \Pi_j = 1$$

است . با وجود این چون بسهولت می توان بررسی نمود که

$$\Pi_j = \binom{M}{j} (\tfrac{1}{2})^M, \qquad j = 0, \ldots, M$$

در معادلات بالا صدق می کند لذا اینها نسبت دفعات در دراز مدت هستند که زنجیر مارکف در هریک از حالات است . (برای توضیح این که جوابهای بالا را چگونه می توان حدس زد مسأله ۱۱ را ملاحظه کنید) .

۳ - شگفتی ، عدم اطمینان و آنتروپی

پیشامد E را در نظر بگیرید که با انجام یک آزمایش می تواند رخ دهد . وقتی پیشامد E در واقع رخ می دهد چقدر تعجب می کنیم ؟ معقول به نظر می رسد فرض کنیم که میزان شگفتی که با اطلاع از روی دادن E به وجود می آید باید به احتمال E بستگی داشته باشد . برای مثال اگر آزمایش پرتاب یک جفت تاس باشد آن گاه شنیدن این که پیشامد E « مجموع دو عدد تاس زوج» (با احتمال $\frac{۱}{۲}$) رخ داده است ما را زیاد متعجب نمی کند در صورتی که شنیدن این که پیشامد E «مجموع دو عدد تاس ۱۲» (با احتمال $\frac{۱}{۳۶}$) اتفاق افتاده است یقیناً ما را بیشتر متعجب می کند .

در این بخش سعی می کنیم مفهوم شگفتی را به صورت کمی در آوریم . برای شروع فرض می کنیم که احساس ما از « شگفتی» آموختن این مطلب است که رویداد پیشامد E تنها به احتمال آن بستگی دارد و فرض کنید S (p) شگفتی حاصل پیشامدی باشد که احتمال وقوع آن p است . ابتدا می خواهیم شکل تابعی S (P) را که باید در شرایط معقولی صدق کند تعیین کنیم و سپس ثابت کنیم که این اصول نیاز به این دارد که S (P) شکل مشخصی داشته باشد . S(P) را برای هر $0 < P \leq 1$ تعریف می کنیم ولی برای پیشامدهایی که $P = 0$ است تعریف نمی شود .

اولین شرط درست یک حقیقت شهودی است و آن شنیدن وقوع یک پیشامد حتمی است که جای تعجب ندارد .

اصل ۱

$$S(1) = 0$$

شرط دوم بیان می کند که هرچه احتمال وقوع یک پیشامد ضعیفتر باشد، وقوع آن ما را بیشتر متعجب می کند.

اصل ۲

$S(p)$ یک تابع اکیداً نزولی از p است یعنی اگر $p < q$ ، آن گاه $S(p) > S(q)$.

شرط سوم بیان ریاضی این حقیقت است که بطور شهودی انتظار داریم که یک تغییر کوچک در P به یک تغییر کوچک در $S(P)$ مربوط شود.

اصل ۳

$S(P)$ یک تابع پیوسته از P است.

برای بیان انگیزهٔ شرط آخر دو پیشامد مستقل E و F به ترتیب با احتمالهای $P(E) = P$ و $P(F) = q$ را در نظر می گیریم. چون $P(EF) = Pq$ لذا شگفتی حاصل از اطلاع وقوع E و F برابر $S(pq)$ است. حال فرض کنید اول E رخ داده است و بعد از آن F اتفاق افتاده باشد. چون $S(p)$ شگفتی حاصل از وقوع E است لذا $S(pq) - S(P)$ شگفتی اضافی حاصل از اطلاع وقوع F است. با وجود این چون F مستقل از E است دانستن وقوع E احتمال F را تغییر نمی دهد وبنابراین تعجب اضافی باید دقیقاً $S(q)$ باشد. این استدلال شرط دیگری را پیشنهاد می کند

اصل ۴

$$S(pq) = S(p) + S(q) \qquad 0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1$$

حال برای قضیهٔ ۳-۱ که ساختمان $S(p)$ را می دهد آماده هستیم.

قضیهٔ ۳ - ۱

اگر $S(\cdot)$ در اصول ۱ تا ۴ صدق کند آن گاه

$$S(p) = -C \log_2 p$$

که در آن C یک عدد صحیح مثبت دلخواه است

برهان : از اصل ۴ نتیجه می شود

$$S(p^2) = S(p) + S(p) = 2S(p)$$

و با استقرا داریم

$$S(p^m) = mS(p) \qquad (۱-۳)$$

همچنین چون برای هر عدد صحیح n ، $S(p) = S(p^{1/n} \dots p^{1/n}) = nS(p^{1/n})$ در نتیجه

$$S(p^{1/n}) = \frac{1}{n} S(p) \qquad (۲-۳)$$

بنابراین از معادلات (۳-۱) و (۳-۲) به دست می آوریم

$$S(p^{m/n}) = mS(p^{1/n}) = \frac{m}{n} S(p)$$

که وقتی x یک عدد گویای مثبت است معادل است با

$$S(p^x) = xS(p) \qquad (۳-۳)$$

اما این طبق پیوستگی S (اصل ۳) نتیجه می دهد که معادلهٔ (۳-۳) برای تمام x های نا منفی معتبر است. (ثابت کنید).

اکنون برای هر p ، $0 < p \leq 1$ فرض کنید $x = -\log_2 p$. در این صورت $p = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ و از معادلهٔ (۳-۳) نتیجه می شود که

$$S(p) = S((\tfrac{1}{2})^x) = xS(\tfrac{1}{2}) = -C \log_2 p$$

که بنا به اصول ۱ و ۲ ، $C = S\left(\frac{1}{2}\right) > S(1) = 0$.

مطابق معمول C را مساوی ۱ در نظر می گیریم. در این حالت تعجب را بر حسب واحدهای رقم دو دویی بیان می کنند.

اکنون یک متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید که بایستی یکی از مقادیر x_1 ، . . . ، x_n را به ترتیب با احتمالهای $p_1, \dots, p_n$ انتخاب کند. چون اگر X مقادیر x_i را انتخاب کند $-\log p_i$

شگفتی حاصل را نشان می دهد[1] ، لذا امید میزان شگفتی که از دانستن مقدار X دریافت می کنیم به صورت زیر داده می شود

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

در نظریهٔ اطلاع، $H(X)$ به عنوان آنتروپی متغیر تصادفی X در نظر گرفته می شود. (در حالت $P_i = 0$ ، $0 \log 0$ را مساوی 0 فرض می کنیم). می توان نشان داد (به عنوان تمرین نشان دهید) که وقتی تمام P_i ها مساوی باشند $H(X)$ ماکزیمم می شود. (آیا این مطلب واضح است ؟).

چون $H(X)$ متوسط میزان شگفتی را که از دانستن مقدار X دریافت می شود نشان می دهد آن را به عنوان نمایش دهندهٔ میزان **عدم اطمینانی** که برای مقدار X وجود دارد نیز می توان تعبیر نمود. در حقیقت در نظریهٔ اطلاع $H(X)$ متوسط میزان **اطلاعی** است که از مشاهدهٔ مقدار X دریافت می شود. بنابراین متوسط شگفتی که توسط X به وجود می آید، عدم اطمینان X، یا متوسط میزان اطلاع به دست آمده از X همگی یک مفهوم را نشان می دهند که از سه دیدگاه تا حدی متفاوت مورد بررسی قرار می گیرند.

حال متغیرهای تصادفی X و Y که به ترتیب مقادیر x_1 ، ... ، x_m و y_1 ، . . . ، y_m را می گیرند با تابع چگالی احتمال توأم زیر در نظر می گیریم

$$p(x_i, y_j) = P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

بنابر این عدم اطمینان به عنوان مقدار بردار تصادفی (X, Y) که با $H(X, Y)$ نشان داده می شود عبارت است از

$$H(X, Y) = -\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j)$$

اکنون فرض کنیم y_j مقدار مشاهد شدهٔ Y است. در این وضعیت میزان عدم اطمینان باقیمانده در X با

$$H_{Y=y_j}(X) = -\sum_i p(x_i | y_j) \log p(x_i | y_j)$$

داده می شود که

---

[1] - در باقیماندهٔ این فصل $\log x$ را به جای $\log_2 x$ می نویسیم. همچنین از $\ln x$ به جای $\log_e x$ استفاده می کنیم.

$$p(x_i | y_j) = P\{X = x_i | Y = y_j\}$$

بنابراین متوسط میزان عدم اطمینانی که بعد از مشاهده Y در X باقی می ماند عبارت است از

$$H_Y(X) = \sum_j H_{Y=y_j}(X) p_Y(y_j)$$

که در آن

$$p_Y(y_j) = P\{Y = y_j\}$$

حکم ۳-۱ ، $H(X, Y)$ را به $H(Y)$ و $H_Y(X)$ مربوط می کند. این حکم بیان می کند که عدم اطمینان مربوط با مقدار X و Y برابر است با عدم اطمینان Y به علاوهٔ متوسط عدم اطمینان باقیمانده در X وقتی Y مشاهده می شود.

حکم ۳- ۱

$$H(X, Y) = H(Y) + H_Y(X)$$

برهان : با استفاده از تساوی $p(x_i, y_j) = p_Y(y_j)\, p(x_i | y_j)$

$$\begin{aligned}
H(X, Y) &= -\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j) \\
&= -\sum_i \sum_j p_Y(y_j) p(x_i | y_j)[\log p_Y(y_j) + \log p(x_i | y_j)] \\
&= -\sum_j p_Y(y_j) \log p_Y(y_j) \sum_i p(x_i | y_j) \\
&\quad -\sum_j p_Y(y_j) \sum p(x_i | y_j) \log p(x_i | y_j) \\
&= H(Y) + H_Y(X)
\end{aligned}$$

یک نتیجهٔ اساسی در نظریهٔ اطلاع این است که میزان عدم اطمینانی که در متغیر تصادفی X است وقتی متغیر تصادفی دوم Y مشاهده می شود بطور متوسط کاهش می یابد. قبل از اثبات این مطلب به لم زیر نیاز داریم که اثبات آن به عنوان تمرین در نظر گرفته شده است.

لم ۳- ۱

$$\ln x \le x - 1 \qquad x > 0$$

و تنها در ۱ = x تساوی بر قرار است .

قضیهٔ ۳ - ۲

$$H_Y(X) \leq H(X)$$

و اگر و تنها اگر X , Y مستقل باشند تساوی برقرار است .

برهان

$$\begin{aligned}
H_Y(X) - H(X) &= -\sum_i \sum_j p(x_i \mid y_j) \log [p(x_i \mid y_j)] p(y_j) \\
&\quad + \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log p(x_i) \\
&= \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log \left[\frac{p(x_i)}{p(x_i \mid y_j)} \right] \\
&\leq \log e \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \left[\frac{p(x_i)}{p(x_i \mid y_j)} - 1 \right] \qquad \text{بنا به لم ۳-۱} \\
&= \log e \left[\sum_i \sum_j p(x_i) p(y_j) - \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \right] \\
&= \log e [1 - 1] \\
&= 0
\end{aligned}$$

۴ - نظریهٔ کدگذاری و آنتروپی

فرض کنید که مقدار یک بردار تصادفی گسستهٔ X را در محل A مشاهده نموده و سپس از طریق یک شبکه ارتباطی متشکل از دو علامت 0 و ۱ به محل B انتقال دهیم . برای انجام این امر ابتدا لازم است هر مقدار ممکن X را بر حسب دنباله ای از 0 و ۱ ها به صورت کد در آوریم . برای این که ابهامی نباشد معمولاً لازم است بدانیم که هیچ دنبالهٔ به کد در آورده شده را نمی توان از یک دنبالهٔ کد گذاری شدهٔ کوتاهتر با افزودن جملات بیشتری به آن به دست آورد .

به عنوان مثال اگر X چهار مقدار ممکن x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 را انتخاب کند آن گاه یک کدگذاری ممکن عبارت است از

$$\begin{aligned} x_1 &\leftrightarrow 00 \\ x_2 &\leftrightarrow 01 \\ x_3 &\leftrightarrow 10 \\ x_4 &\leftrightarrow 11 \end{aligned} \tag{۴-۱}$$

یعنی اگر $X = x_1$ باشد پیغام 00 و در صورتی که $X = x_2$ باشد 01 به B فرستاده می شود و به همین ترتیب الی آخر. یک کد گذاری دیگر به صورت زیر است

$$\begin{aligned} x_1 &\leftrightarrow 0 \\ x_2 &\leftrightarrow 10 \\ x_3 &\leftrightarrow 110 \\ x_4 &\leftrightarrow 111 \end{aligned} \tag{۴-۲}$$

با وجود این کدگذاری زیر

$$\begin{aligned} x_1 &\leftrightarrow 0 \\ x_2 &\leftrightarrow 1 \\ x_3 &\leftrightarrow 00 \\ x_4 &\leftrightarrow 01 \end{aligned}$$

درست نیست زیرا دنباله های کد گذاری شدهٔ مربوط به x_3 و x_4 هردو تعمیم کد گذاری مربوط به x_1 است. یکی از اهداف درست کردن یک کد این است که میانگین تعداد رقمهای دو دویی (یعنی رقمهای دوتایی) را که لازم است از محل A به محل B فرستاده شوند مینیمم کنیم، برای مثال اگر

$$\begin{aligned} P\{X = x_1\} &= \tfrac{1}{2} \\ P\{X = x_2\} &= \tfrac{1}{4} \\ P\{X = x_3\} &= \tfrac{1}{8} \\ P\{X = x_4\} &= \tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

در این صورت کدی که با معادلهٔ (۴-۲) داده می شود انتظار می رود به $\frac{۱}{۲}(۱) + \frac{۱}{۴}(۲) + \frac{۱}{۸}(۳) + \frac{۱}{۸}(۳) = ۱/۷۵$ رقم دو دویی فرستاده شود در صورتی که کدی که با معادله (۴-۱) داده می شود انتظار می رود به ۲ رقم دو دویی فرستاده شود. بنابراین برای مجموعه احتمالهای بالا کد گذاری در معادلهٔ (۴-۲) نسبت به معادله (۴-۱) کاراتراست.

موضوع بالا سؤال زیر را موجب می شود: برای یک بردار تصادفی معلوم X ماکزیمم کارایی که با یک طرح کد گذاری به دست می آید چقدر است؟ جواب این است که برای هر کد گذاری متوسط تعداد رقمهای دو دویی که فرستاده می شود دست کم به بزرگی آنتروپی X

است. برای اثبات این نتیجه که در نظریهٔ اطلاع به قضیهٔ کد گذاری بدون اغتشاش مشهور است، لم ۴-۱ را لازم داریم.

لم ۴-۱

فرض کنید X مقادیر ممکن $x_1, \ldots, x_n$ را انتخاب کند. در این صورت برای این که کدگذاری مقادیر X در دنباله های دوتایی (هیچ یک از آنها تعمیم دیگری نیست) به ترتیب با طولهای n_1 ، . . . ، n_N امکان پذیر باشد لازم و کافی است که

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n_i} \leq 1$$

برهان: برای یک مجموعه ثابت از N عدد صحیح مثبت n_1 ، . . . ، n_N فرض کنید W_j تعداد n_i های مساوی j ، $j = 1,2,\ldots$ را نشان دهد. برای این که یک کدگذاری باشد که n_i رقم دو دویی را به مقدار x_i ، $i = 1,2,\ldots,N$ نسبت دهد لازم است $W_1 \leq 2$ باشد. علاوه بر این چون هیچ دنبالهٔ دوتایی تعمیم دیگری نیست باید داشته باشیم $W_2 \leq 2^2 - 2W_1$ (زیرا تعداد دنباله های دوتایی به طول دو برابر 2^2 بوده در حالی که $2W_1$ تعداد دنباله هایی است که تعمیمهای W_1 دنبالهٔ دوتایی به طول ۱ است). بطور کلی دلیل مشابهی نشان می دهد که باید برای $n = 1,2,\ldots$ داشته باشیم

$$w_n \leq 2^n - w_1 2^{n-1} - w_2 2^{n-2} - \cdots - w_{n-1} 2 \tag{۴-۳}$$

در حقیقت قدری تفکر باید خواننده را قانع کند که این شرایط نه تنها لازمست بلکه برای وجود یک کد گذاری که n_i رقم دو دویی را به x_i ، $i = 1, \ldots, N$ نسبت می دهد کافی نیز هست.

اگر نامساوی (۴-۳) را دوباره به صورت

$$w_n + w_{n-1} 2 + w_{n-2} 2^2 + \cdots + w_1 2^{n-1} \leq 2^n \qquad n = 1, \ldots$$

نوشتهٔ وبر "۲ بخش کنیم شرطهای لازم و کافی را به صورت زیر حاصل می کند

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\tfrac{1}{2}\right)^j \leq 1 \tag{۴-۴}$$

با وجود این چون $\sum_{j=1}^{n} W_j\left(\frac{1}{2}\right)^j$ نسبت به n صعودی است لذا معادلهٔ (۴-۴) فقط و فقط وقتی درست خواهد بود که

$$\sum_{j=1}^{\infty} w_j\left(\tfrac{1}{2}\right)^j \leq 1$$

حال نتیجه ثابت می شود، زیرا بنا به تعریف چون w_j مقدار n_i های مساوی j است لذا

$$\sum_{j=1}^{\infty} w_j\left(\tfrac{1}{2}\right)^j = \sum_{i=1}^{N} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n_i}$$

اکنون آمادهٔ اثبات قضیهٔ ۴-۱ می باشیم.

قضیه ۴-۱ قضیه کُدگذاری بدون اغتشاش

فرض کنید X مقادیر x_1 ، . . . ، x_N را به ترتیب با احتمالهای $P(x_1)$ ، . . . ، $P(x_N)$ انتخاب نماید. در این صورت برای هر کدگذاری X که n_i دو دویی را به x_i نسبت دهد داریم

$$\sum_{i=1}^{N} n_i p(x_i) \geq H(X) = -\sum_{i=1}^{N} p(x_i) \log p(x_i)$$

برهان: فرض کنید $P_i = p(x_i)$، $q_i = \dfrac{2^{-n_i}}{\sum_{j=1}^{N} 2^{-n_j}}$ ، $i = 1, \ldots, N$ در این صورت

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{N} P_i \log\left(\frac{P_i}{q_i}\right) &= -\log e \sum_{i=1}^{N} P_i \ln\left(\frac{P_i}{q_i}\right) \\
&= \log e \sum_{i=1}^{N} P_i \ln\left(\frac{q_i}{P_i}\right) \\
&\leq \log e \sum_{i=1}^{N} P_i\left(\frac{q_i}{P_i} - 1\right) \qquad \text{بنا به لم ۳-۱} \\
&= 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} P_i = \sum_{i=1}^{N} q_i = 1
\end{aligned}$$

بنابر این

$$-\sum_{i=1}^{N} P_i \log P_i \le -\sum_{i=1}^{N} P_i \log q_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} n_i P_i + \log\left(\sum_{j=1}^{N} 2^{-n_j}\right)$$

$$\le \sum_{i=1}^{N} n_i P_i$$ بنا به لم ۴-۱

مثال ۴ الف. یک متغیر تصادفی X با تابع جرم احتمال زیر را در نظر می گیریم

$$p(x_1) = \tfrac{1}{2} \qquad p(x_2) = \tfrac{1}{4} \qquad p(x_3) = p(x_4) = \tfrac{1}{8}$$

چون

$$\begin{aligned} H(X) &= -[\tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\log\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\log\tfrac{1}{8}] \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{3}{4} \\ &= 1.75 \end{aligned}$$

از قضیهٔ ۴-۱ نتیجه می شود که طرح کدگذاری کاراتری از طرح زیر وجود ندارد

$$\begin{aligned} x_1 &\leftrightarrow 0 \\ x_2 &\leftrightarrow 10 \\ x_3 &\leftrightarrow 110 \\ x_4 &\leftrightarrow 111 \end{aligned}$$

برای اکثر بردارهای تصادفی یک کد گذاری که برای آن متوسط تعداد رقمهای دو دویی کران پایین H (X) را بگیرد وجود ندارد. مع هذا همیشه یک کدگذاری که متوسط تعداد رقمهای دو دویی بین H (X) و H (X) + 1 باشد ممکن است. برای اثبات آن n_i را عدد درستی تعریف می کنیم که در نا مساوی زیر صدق کند

$$-\log p(x_i) \le n_i \le -\log p(x_i) + 1$$

اکنون

$$\sum_{i=1}^{N} 2^{-n_i} \le \sum_{i=1}^{N} 2^{\log p(x_i)} = \sum_{i=1}^{N} p(x_i) = 1$$

و بنابر این بنا به لم ۴-۱ دنباله هایی از رقمهای دو دویی با طولهای n_i را به x_i، $i = 1, \ldots, N$ می توان مرتبط ساخت. متوسط طول یک چنین دنباله ای

$$L = \sum_{i=1}^{N} n_i p(x_i)$$

در

$$-\sum_{i=1}^{N} p(x_i)\log p(x_i) \le L \le -\sum_{i=1}^{N} p(x_i)\log p(x_i) + 1$$

یا

$$H(X) \le L \le H(X) + 1$$

صدق می کند.

مثال ۳ ب. فرض کنید سکه ای را که احتمال آمدن شیر برای آن برابر p است بطور مستقل در محل A ده بار پرتاب نموده ایم و می خواهیم نتیجه را به محل B منتقل نماییم. برآمد این آزمایش بردار تصادفی $X = (X_1, \ldots, X_{10})$ است که وقتی که برآمد پرتاب i ام شیر باشد یا نباشد - X_i را ۱ یا 0 در نظر می گیریم. با توجه به نتایج این بخش ، L، یعنی متوسط تعداد رقمهای دو دویی که با هر کد منتقل می شود در

$$H(X) \le L$$

$$L \le H(X) + 1$$

برای دست کم با یک کُد صدق می کند. اکنون چون X_i ها مستقلند از حکم ۳-۱ و قضیهٔ ۳-۲ نتیجه می شود

$$\begin{aligned} H(X) = H(X_1, \ldots, X_n) &= \sum_{i=1}^{n} H(X_i) \\ &= -10[p\log p + (1-p)\log(1-p)] \end{aligned}$$

اگر $p = \frac{1}{2}$ باشد آن گاه $H(X) = 10$ بنابراین نمی توانیم بهتر از این که X را با مقدار واقعی آن کد گذاری کنیم عمل کنیم. یعنی برای مثال اگر نتیجهٔ ۵ پرتاب اول شیر و ۵ پرتاب آخر خط باشد در این صورت پیام ۱۱۱۱۱۰۰۰۰۰ به محل B منتقل می گردد.

با وجود این اگر $p \neq \frac{1}{2}$ باشد با استفاده از طرحهای کدگذاری مختلف اغلب بهتر عمل می کنیم. برای مثال اگر $p = \frac{1}{4}$ آن گاه

$$H(X) = -10(\tfrac{1}{4}\log\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\log\tfrac{3}{4}) = 8.11$$

و بنابراین یک کد گذاری وجود دارد که متوسط طول پیام کد بیشتر از ۹٫۱۱ نیست.

در این حالت یک کد گذاری سادهٔ مؤثرتر از کد همانی این است که $(X_1, \ldots, X_{10})$ را به ۵ زوج که هریک دو متغیر تصادفی دارد تقسیم کنیم و سپس هر زوج را به طریق زیر برای

i = 1,3,5,7,9 به کد در آوریم:

$$X_i = 0,\ X_{i+1} = 0 \leftrightarrow 0$$
$$X_i = 0,\ X_{i+1} = 1 \leftrightarrow 10$$
$$X_i = 1,\ X_{i+1} = 0 \leftrightarrow 110$$
$$X_i = 1,\ X_{i+1} = 1 \leftrightarrow 111$$

بنابراین کل پیام منتقل شده کدهای پیاپی زوجهای بالاست.

برای مثال اگر برآمد T T T HH T T T T H مشاهده شود آن گاه پیام 010110010 فرستاده می شود، متوسط تعداد رقمهای دو دویی لازم برای انتقال پیام با استفاده از این کد عبارت است از

$$5[1(\tfrac{3}{4})^2 + 2(\tfrac{1}{4})(\tfrac{3}{4}) + 3(\tfrac{1}{4})(\tfrac{3}{4}) + 3(\tfrac{1}{4})^2] = \tfrac{135}{16} = 8.44$$

تا این جا فرض بر این بود که پیامی که از محل A به محل B ارسال می شود بدون خطا باشد. مع هذا همواره خطاهای حتمی هستند که به علت اغتشاشات تصادفی کانال ارتباطات می توانند اتفاق بیفتند. به عنوان مثال این گونه اغتشاشات تصادفی ممکن است موجب شود که پیغام 00101101 ارسالی از A ، در B به شکل 01101101 دریافت گردد.

فرض کنید رقم دو دویی ارسالی از محل A مستقل از رقمی به رقم دیگر در محل B با احتمال p درست دریافت شود. این سیستم ارتباطات یک کانال متقارن دو تایی نامیده می شود. علاوه بر این فرض کنید که $p = ۰٫۸$ باشد و بخواهیم پیامی متشکل از تعداد زیادی رقم دو دویی را از A به B منتقل نماییم. بنابراین نتیجهٔ انتقال مستقیم پیام، خطایی است با احتمال ۰٫۲۰ برای هر رقم دو دویی که خیلی زیاد است. یک راه کاهش دادن این احتمال خطای دو دویی این است که هر رقم دو دویی را ۳ مرتبه منتقل نموده و سپس طبق قانون اکثریت کد را بر داریم. یعنی از طرح زیر می توانیم استفاده کنیم:

کدگذاری	کدگشایی
$0 \to 000$	$\left.\begin{matrix}000\\001\\010\\100\end{matrix}\right\} \to 0$
$1 \to 111$	$\left.\begin{matrix}111\\110\\101\\011\end{matrix}\right\} \to 1$

توجه داشته باشید که اگر در انتقال بیش از یک خطا روی ندهد آن گاه کد رقم دو دویی بطور صحیحی برداشته می شود. بنابراین احتمال خطای رقم دو دویی به

$$(.2)^3 + 3(.2)^2(.8) = .104$$

کاهش پیدا می کند که بطور قابل ملاحظه ای بهتر شده است. در حقیقت واضح است که اگر رقم دو دویی را دفعات زیادی تکرار نموده و سپس با قانون اکثریت کُد را برداریم می توانیم احتمال خطای رقم دو دویی را به اندازه ای که می خواهیم کوچک کنیم. به عنوان مثال طرح زیر احتمال خطای رقم دو دویی را به کمتر از ۰٫۰۱ کاهش می دهد.

جدول ۹-۱ تکرار طرح کد گذاری رقمهای دو دویی

نرخ (رقمهای دودویی منتقل شده در هر علامت)	احتمال خطا (در هر رقم دودویی)
1	.20
.33 ($=\frac{1}{3}$)	.10
.06 ($=\frac{1}{17}$)	.01

در حقیقت در این جابرای خواننده مسلم است که کم کردن احتمال خطای رقم دودویی به 0 نتیجه اش کاهش نرخ مؤثر که درآن رقمهای دودویی درهرعلامت به 0 منتقل می شوندنیز می باشد. مع هذا این نتیجهٔ برجسته ای درنظریه اطلاع است که به قضیهٔ «کدگذاری با اغتشاش» معروف بوده وبه کلودشان نسبت داده می شود. حال این نتیجه را به صورت قضیهٔ ۴-۲ بیان می کنیم.

قضیهٔ ۴-۲ قضیهٔ کُد گذاری با اغتشاش

عددی مانند C وجود دارد که برای هر مقدار R کمتر از C و هر $\varepsilon > 0$ یک طرح کُدگذاری ـ کُدگشایی وجود دارد که با متوسط نرخ R رقم دو دویی برای هر علامت ارسالی با احتمال خطای (برای هر رقم دو دویی) کمتر از ε انتقال را انجام می دهد. بزرگترین مقدار C را C^* نامیده و آن را ظرفیت کانال می نامند و برای کانال متقارن دودویی داریم

(F) برای تعیین C^* از جنبهٔ آنتروپی به مسأله ۱۸ مراجعه کنید.

مسائل و تمرینهای نظری

۱- مشتریان یک بانک با نرخ پواسن λ وارد بانک می شوند. فرض کنید در اثنای ساعت اول دو مشتری وارد بانک شوند؛ احتمال این که
(الف) هردو در طول بیست دقیقه اول وارد شوند
(ب) دست کم یکی در طول بیست دقیقهٔ اول وارد شود
چقدر است؟

۲- اتومبیلها از نقطهٔ معینی در بزرگراه طبق یک فرآیند پواسن با نرخ $\lambda=3$ در دقیقه عبور می کنند. اگر شخصی بیباکانه از عرض بزرگراه عبور کند و اگر پیمودن عرض بزرگراه در آن نقطه S ثانیه طول بکشد احتمال این که صدمه نبیند چقدر است؟ (فرض کنید وقتی که یک اتومبیل عبور می کند او در بزرگراه باشد در این صورت صدمه خواهد دید). آن را برای $s=2,5,10,20$ انجام دهید.

۳- در مسألهٔ ۲ فرض کنید که او برای فرار از یک اتومبیل به اندازهٔ کافی چابک است ولی اگر در هنگام اقدام به عبور از عرض جاده با دو اتومبیل یا بیشتر مواجه شود در این صورت صدمه خواهد دید اگرزمان عبور s ثانیه به طول انجامد احتمال این که صدمه نبیند چقدر است؟ آن را برای $s=5,10,20,30$ انجام دهید.

۴- فرض کنید که سه توپ سفید و سه توپ سیاه را در دو ظرف چنان توزیع کرده ایم که هریک شامل ۳ توپ باشد. سیستم را در حالت i گوییم هرگاه ظرف اول i توپ سفید داشته باشد $(i=0,1,2,3)$. در هر مرحله یک توپ را از هریک از ظرفها استخراج نموده توپی که از ظرف اول خارج می شود در ظرف دوم و توپی که از ظرف دوم خارج می شود در ظرف اول قرار می دهیم. اگر X_n حالت سیستم بعد از n مرحله باشد، احتمالهای انتقال زنجیر مارکف $\{X_n, n\geq 0\}$ را محاسبه کنید.

۵- مثال ۲ الف را در نظر بگیرید. اگر احتمال این که امروز باران ببارد ۵۰ : ۵۰ باشداین احتمال را که از حالا به بعد سه روز باران ببارد ($\alpha=0/7$ و $\beta=0/3$) محاسبه کنید.

۶- احتمالهای حدی را برای الگوی مسألهٔ ۴ محاسبه کنید.

۷- ماتریس احتمالهای انتقال را تصادفی مضاعف گوییم هرگاه برای تمام حالات $j=0,1,\ldots,M$ داشته باشیم

$$\sum_{i=0}^{M} P_{ij} = 1$$

اگر این زنجیر مارکف ارگودیک باشد نشان دهید

$$\Pi_j = 1/(M+1), \; j = 0, 1, \ldots, M.$$

۸- ربکا در روز معینی خوشحال (c) یا بی تفاوت (s) یا افسرده (g) است. اگر امروز خوشحال باشد آن گاه فردا به ترتیب با احتمالهای ۰٫۷، ۰٫۲ و ۰٫۱ خوشحال، بی تفاوت (s) یا افسرده (g) خواهد بود. اگر امروز بی تفاوت باشد آن گاه فردا به ترتیب با احتمالهای ۰٫۴، ۰٫۳، ۰٫۳ خوشحال، بی تفاوت یا افسرده است. اگر امروز افسرده باشد آن گاه فردا به ترتیب با احتمالهای ۰٫۲، ۰٫۴ و ۰٫۴ خوشحال، بی تفاوت یا افسرده خواهد بود. چه سهمی از دفعات ربکا خوشحال است؟

۹- فرض کنید باریدن یا نباریدن باران در فردا تنها به شرایط هوا در دو روز گذشته بستگی داشته باشد. بویژه فرض کنید که اگر دیروز و امروز باران آمده در این صورت فردا با احتمال ۰٫۸ باران خواهد آمد و اگر دیروز باران باریده باشد ولی امروز نباریده باشد در این صورت فردا با احتمال ۰٫۳ باران خواهد آمد و اگر امروز باران ببارد ولی دیروز نباریده باشد آن گاه فردا با احتمال ۰٫۴ خواهد بارید و اگر دیروز یا امروز باران نباریده باشد در این صورت فردا با احتمال ۰٫۲ خواهد بارید. چه نسبتی از روزها باران می آید ؟

۱۰ - فردی هر روز صبح منزل را به قصد دویدن ترك می کند. هنگامی که او برای دویدن منزلش را ترك می کند با احتمال مساوی از در جلو یا در عقب خارج می شود و بطور مشابه هنگام برگشت به منزل با احتمال یکسان از در جلو یا عقب وارد می شود. دونده ۵ جفت کفش مخصوص دویدن دارد که پس از دویدن از دری که بطور اتفاقی وارد شده است از پا در می آورد. اگر جلو دری که او برای دویدن ترك می کند کفشی نباشد با پای برهنه می دود. می خواهیم نسبت دفعاتی را که پا برهنه می دود تعیین کنیم.

(الف) این را به صورت یک زنجیر مارکف منظم کنید. حالات واحتمالهای انتقال را بدهید.

(ب) نسبت روزهایی را که او با پای برهنه می دود تعیین کنید.

۱۱ - با استفاده از اطلاعات مثال ۲ ج مسأله را حل کنید.

(الف) ثابت کنید که مقدار پیشنهادی Π_i در معادلاتی که لازم است صدق می کند.

(ب) برای یک مولکول معلوم در مورد احتمال (حدی) که مولکول در ظرف ۱ باشد چه

فکر می کنید؟

(پ) آیا فکر می کنید پیشامدهایی که برای آنها مولکول $j\ (j \geq 1)$ در یک زمان بسیار زیاد در ظرف ۱ است (در حد) مستقلند؟

(ت) بیان کنید که چرا احتمالهای حدی همان احتمالهای داده شده اند.

۱۲- در پرتاب دو تاس آنتروپی مجموع دو تاس را تعیین کنید.

۱۳- اگر X هریک از n مقدار ممکن را با احتمالهای p_1 ، ... ، p_n انتخاب کند ثابت کنید ماکزیمم $H(X)$ وقتی حاصل می شود که $p_i = \frac{1}{n}$ ، $i = 1, \ldots, n$. در این حالت $H(x)$ برابر چه مقداری است؟

۱۴- یک جفت تاس متعادل پرتاب می شود؛ فرض کنید

$$X = \begin{cases} 1 & \text{مجموع تاسها برابر ۶ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و Y مساوی مقدار تاس اول باشد:

(الف) $H(Y)$ (ب) $H_Y(X)$ و (پ) $H(X, Y)$ را محاسبه کنید.

۱۵- سکه ای را که احتمال آمدن شیر آن $p = \frac{۲}{۳}$ است ۶ دفعه پرتاب می کنیم. آنتروپی برآمد این آزمایش را محاسبه کنید.

۱۶- یک متغیر تصادفی هریک از n مقدار ممکن $x_1, \ldots, x_n$ را به ترتیب با احتمالهای $p(x_i)$ ، $i = 1, \ldots, n$ انتخاب می کند. می خواهیم مقدار X را با پرسیدن مجموعه سؤالاتی که پاسخ آنها «بلی» یا «خیر» است تعیین کنیم. برای مثال ممکن است سؤال کنیم که آیا "$X = x_1$" است؟ یا آیا «X مساوی x_1 یا x_2 یا x_3 است؟ و به همین ترتیب الی آخر. در مورد متوسط تعداداین سؤالها که برای تعیین مقدار X سؤال کردن آن لازم است، چه می توان گفت؟

۱۷- برای هر متغیر تصادفی گسسته X و تابع f نشان دهید که

$$H(f(X)) \leq H(X)$$

۱۸- در انتقال یک رقم دو دویی از محل A به محل B اگر مقدار رقم دو دویی را که از محل A فرستاده می شود به X و Y مقدار دریافت شده در محل B باشد آن گاه $H(X) - H_Y(X)$ نرخ انتقال اطلاعات از A به B نامیده می شود. نرخ بیشینهٔ انتقال به عنوان تابعی از $P\{X = 1\} = 1 - P\{X = 0\}$ را ظرفیت کانال می نامند. نشان دهید که برای یک کانال متقارن دوتایی با $P\{Y = 1 | X = 1\} = P\{Y = 0/X = 0\}$ ، ظرفیت کانال بانرخ انتقال اطلاع وقتی $p\{X = 1\} = \frac{1}{2}$ ، به دست می آیدو برابر مقدار آن $1 + p \log p + (1-p) \log (1-p)$ است.

فصل دهم

شبیه سازی

۱ - مقدمه

چگونه می توان احتمال برنده شدن در یک بازی یک نفره را تعیین نمود؟ (منظور ما از یک نفره، هربازی یک نفره استاندارد است که با یک دست ورق ۵۲ تایی معمولی و با شیوهٔ ثابتی بازی می شود) . یک روشِ ممکن این است که با فرضی معقول که تمام ! (۵۲) ترتیب ممکن یک دست ورق با احتمال یکسانی اتفاق می افتند شروع کنیم و سپس تعیین کنیم که چند تا از اینها منتهی به پیروزی می شود. متأسفانه روشی منظم برای تعیین تعداد ترتیبهایی که منجر به پیروزی می شود به نظر نمی رسد و چون ! (۵۲) عدد نسبتاً بزرگی است و تنها راه تعیین این که آیا ترتیب خاصی منجر به پیروزی می شود یا خیر، خسته کننده به نظر می رسد می توان دید که این روش کار نمی کند.

در حقیقت تعیین احتمال پیروزی برای یک بازی تکی از نظر ریاضی به نظر می رسد نشدنی باشد. مع هذا تمام آن را از دست نمی دهیم زیرا احتمال ، نه تنها در قلمرو ریاضی بلکه در قلمرو علوم کاربردی نیز قرار می گیرد و مانند تمام علوم کاربردی آزمایش در آن تکنیک باارزشی است. درمثال یک نفره ، آزمایش به صورت انجام تعداد زیادی از این بازیها درمی آید که خوشبختانه با یک برنامهٔ کامپیوتری می توان آن را انجام داد . بعد از n مرتبه بازی کردن اگر فرض کنیم

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{نتیجهٔ بازی } i\text{ام پیروزی باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

آن گاه X_i ، $i = 1, \ldots, n$ متغیرهای تصادفی برنولی مستقل خواهند بود که برای آن

$$E[X_i] = P\{\text{پیروزی در بازی تکی}\}$$

بنابراین بنا به قانون قوی اعداد بزرگ می دانیم که

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = \frac{\text{تعداد بازیهای برنده شده}}{\text{تعداد بازیهای بازی شده}}$$

با احتمال ۱ به {پیروزی در بازی یک نفره}P همگرا خواهد بود. یعنی اگر تعداد زیادی از بازیها را انجام دهیم از نسبت بازیهای برنده شده به عنوان برآورد احتمال پیروزی می توان استفاده کرد. این روش که در آن احتمالها را بطور تجربی با کمک آزمایش تعیین می کنند **شبیه سازی** نام دارد. اگر بخواهیم برای مطالعهٔ شبیه سازی از کامپیوتر استفاده کنیم باید بتوانیم مقدار یک متغیر تصادفی یکنواخت $(0, 1)$ که این متغیرها را اعداد تصادفی می نامند تولید کنیم. برای تولید این اعداد بیشتر کامپیوترها دستور العمل فرعی آماده دارند که مولد اعداد تصادفی نامیده می شود و خروجی آن دنباله ای از اعداد شبه تصادفی است. برای تمام اهداف عملی این دنباله از اعداد غیرقابل تشخیص از یک نمونه از توزیع یکنواخت $(0, 1)$ است.

بیشتر مولدهای اعداد تصادفی با یک مقدار اولیه X_0 که هسته نامیده می شود شروع شده و سپس بطور برگشتی با مشخص کردن اعداد صحیح مثبت a , c و m و فرض

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \text{ به پیمانهٔ } m \qquad n \geq 0$$

مقادیر محاسبه می شوند که معنی تساوی بالا این است که $aX_n + c$ را بر m بخش کنیم و باقیمانده را به عنوان مقدار X_{n+1} در نظر بگیریم. بنابراین هر X_n ، 0 , 1 , $\ldots$, $m-1$ خواهد بود و کمیت $\frac{X_n}{m}$ به عنوان تقریبی از متغیر تصادفی یکنواخت $(0, 1)$ در نظر گرفته می شود. می توان نشان داد که با توجه به انتخابهای مناسب a , c و m نتیجهٔ آنچه گذشت دنباله ای از اعداد است که چنین می نماید که از متغیرهای تصادفی یکنواخت مستقل $(0, 1)$ تولید شده اند.

به عنوان نقطهٔ شروع در شبیه سازی فرض براین است که می توانیم از توزیع یکنواخت $(0, 1)$ شبیه سازی کنیم و اصطلاح «اعداد تصادفی» را به عنوان متغیرهای تصادفی مستقل از این توزیع به کار می بریم.

در مثال بازی تکی به یک برنامه کامپیوتری نیاز داریم که بازی را با یک ترتیب معلوم ورقها شروع کند. با وجود این چون فرض براین است که ترتیب اولیه با ! (۵۲) تبدیل ممکن هم احتمال باشد لذا باید بتوانیم یک تبدیل تصادفی را تولید نمائیم. اگر فقط از اعداد تصادفی استفاده کنیم الگوریتم زیر چگونگی انجام آن را نشان می دهد. الگوریتم این طور شروع می شود که یکی از عناصر را بتصادف انتخاب نموده و آن را در وضعیت n قرار می دهد و سپس عنصری از میان عناصر باقیمانده بطور تصادفی انتخاب کرده و آن را در وضعیت $n - 1$ قرار می دهد و به همین ترتیب الی آخر . الگوریتم بطور مؤثری تصادفی از میان عناصر باقیمانده انجام می دهد بدین ترتیب که این عناصر را در یک فهرست مرتب نموده و سپس یک موقعیت را از این فهرست بتصادف انتخاب می کند).

مثال ۱ الف. تولید یک تبدیل تصادفی ـ فرض کنید می خواهیم تبدیلی از اعداد صحیح ۱، ۲، . . . ، n را تولید کنیم بطوری که $n!$ ترتیب ممکن آنها هم احتمال باشند. اگر با یک تبدیل اولیه شروع کنیم آن را بعد از $n - 1$ مرحله که در هر مرحله موقعیتهای دوعدد از اعداد تبدیل را عوض می کنیم کامل می نمایيم. پس از آن با این فرض که $X(i)$ ، $i = 1, \ldots, n$ عددی فعلی در موقعیت i را نشان می دهد از تبدیل استفاده می کنیم. الگوریتم به صورت زیر عمل می کند:

۱- هر تبدیل دلخواه را در نظر گرفته و فرض می کنیم $X(i)$ عنصر در موقعیت i ، $i = 1, \ldots, n$ است. (برای مثال می توانیم $X(i) = i$ ، $i = 1, \ldots, n$ را در نظر بگیریم).

۲- یک متغیر تصادفی N_n که هریک از مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را با احتمال مساوی انتخاب می کند تولید می کنیم .

۳- مقادیر $X(N_n)$ و $X(n)$ را تعویض می کنیم. حال مقدار $X(n)$ ثابت باقی می ماند. [برای مثال فرض کنید ۴ = n و $X(i) = i$ ، $i = 1,2,3,4$ را برای شروع در نظر بگیرید. اگر $N_4 = ۳$ آن گاه تبدیل جدید $X(1) = ۱$ ، $X(2) = ۲$ ، $X(۳) = ۴$ ، $X(۴) = ۳$ است و عنصر ۳ همواره در موقعیت ۴ باقی می ماند] .

۴- متغیر تصادفی N_{n-1} که با احتمال مساوی اعداد $1, 2, \ldots, (n - 1)$ را می گیرد تولید می کنیم.

۵- مقادیر $X(N_{n-1})$ و $X(n-1)$ را تعویض می کنیم. [اگر $N_3 = 1$ باشد آن گاه تبدیل جدید $X(۱) = ۴$ ، $X(۲) = ۲$ ، $X(۳) = ۱$ ، $X(۴) = ۳$ خواهد بود] .

۶- N_{n-2} که با احتمال مساوی هریک از اعداد $1, 2, ..., n-2$ را می گیرد تولید می کنیم.

۷- مقادیر $X(N_{n-2})$ و $X(2)$ را تعویض می کنیم. [اگر $N_2 = 1$ باشد آن گاه تبدیل جدید $X(1) = 2$ ، $X(2) = 4$ ، $X(3) = 1$ ، $X(4) = 3$ بوده و این آخرین تبدیل است].

۸- N_{n-3} و غیره را تولید می کنیم. الگوریتم تا تولید N_2 ادامه پیدا می کند و بعد از تعویض بعدی تبدیل نتیجه شده آخرین تبدیل است.

برای بهتر کردن این الگوریتم تولید یک متغیر تصادفی که با احتمال مساوی هریک از مقادیر $1, 2, ..., k$ را انتخاب کند الزامی است. برای انجام آن فرض کنید U عددی تصادفی را نشان می دهد یعنی U در $(0, 1)$ دارای توزیع یکنواخت باشد و توجه داشته باشیم که kU نیز در $(0, k)$ یکنواخت است.

بنابراین

$$P\{i-1 < kU < i\} = \frac{1}{k} \qquad i = 1, \ldots, k$$

پس با فرض $N_k = [kU] + 1$ که $[x]$ قسمت صحیح x است (یعنی بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x) آن گاه N_k توزیع مطلوب را خواهد داشت.

حال الگوریتم را باختصار به صورت زیر می نویسیم:

مرحلهٔ ۱ : فرض کنید $X(1), \ldots, X(n)$ یک تبدیل $1, 2, \ldots, n$ باشد (برای مثال، می توان قرار داد $X(i) = i$ ، $i = 1, \ldots, n$).

مرحلهٔ ۲ : فرض کنید $I = n$

مرحلهٔ ۳ : یک عدد تصادفی U را تولید و قرار دهید $N = [IU] + 1$

مرحلهٔ ۴ : مقادیر $X(N)$ و $X(I)$ را تعویض کنید.

مرحلهٔ ۵ : مقدار I را به اندازهٔ یک واحد کاهش داده و اگر $I > 1$ به مرحلهٔ ۳ بروید.

مرحلهٔ ۶ : $X(1), \ldots, X(n)$ تبدیل مورد نظری است که بتصادف تولید شده است.

الگوریتم بالا برای تولید یک تبدیل تصادفی بی نهایت مفید است. برای مثال فرض کنید که یک آمار دان در حال تهیهٔ آزمایشی است که اثرات m تیمار متفاوت را روی مجموعه ای از n موضوع با هم مقایسه کند. او تصمیم می گیرد موضوعات را به m گروه متفاوت به ترتیب با حجمهای $n_1, n_2, \ldots, n_m$ که $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$ و اعضای گروه i ام تیمار i را دریافت می کنند

تقسیم کند. برای حذف اریبی در تخصیص موضوعات به تیمارها (برای مثال اگر تمام «بهترین» موضوعات را در یک گروه قرار دهیم مفهوم نتایج آزمایش رضایت بخش نخواهد بود) اختصاص یک موضوع به یک گروه معلوم باید «بتصادف» انجام شود، این کار را باید چگونه انجام داد[1]؟

یک روش ساده و مؤثر این است که موضوعات را بدلخواه از ۱ تا n شماره گذاری کرده و سپس یک تبدیل تصادفی $X(1), \ldots, X(n)$ را از ۱، ۲، . . . ، n تولیدکنیم. حال موضوعات $X(1), \ldots, X(n_1)$ را به گروه۱، $X(n_1+1), \ldots, X(n_1+n_2)$ را به گروه ۲ اختصاص داده و بطورکلی گروه j شامل موضوعات به شماره های $X(n_1+n_2+\ldots+n_{j-1}+k)$ ، $k=1, \ldots, n_j$ است.

۲ - تکنیکهای کلی برای شبیه سازی متغیرهای تصادفی پیوسته

در این بخش برای به کاربردن اعداد تصادفی در شبیه سازی متغیرهای تصادفی پیوسته دو روش کلی را ارائه می نمائیم.

۲-۱ روش تبدیل معکوس

یک روش کلی برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که توزیعی پیوسته دارد **روش تبدیل معکوس** نام دارد و بر اساس حکم زیر بنا شده است.

حکم ۲-۱

فرض کنید متغیر تصادفی U در $(0, 1)$ یکنواخت است. برای هر تابع توزیع پیوستهٔ F اگر متغیر تصادفی Y را با

$$Y = F^{-1}(U)$$

تعریف کنیم آن گاه متغیر تصادفی Y دارای تابع توزیع F است. [$F^{-1}(x)$ را مساوی مقدار y که $F(y)=x$ است تعریف می کنیم] .

---

۱ - به ازای $m=2$ تکنیک دیگر تصادفی تقسیم نمودن موضوعات در مثال ۲ ج فصل ۶ ارائه شده است. روش قبلی سریعتر است لیکن نسبت به روش مثال ۲ ج فضای بیشتری لازم دارد.

برهان

$$F_Y(a) = P\{Y \leq a\} \\ = P\{F^{-1}(U) \leq a\} \qquad (۱-۲)$$

اکنون چون $F(x)$ تابعی یکنواست لذا $F^{-1}(U) < a$ اگـر و تنهـا اگـر $U \leq F(a)$. بنابر این از معادلهٔ (۲ - ۱) داریم

$$F_Y(a) = P\{U \leq F(a)\} \\ = F(a)$$

ازحکم۲-۱نتیجه می شودکه با تولید یک عددتصادفی U وسپس قراردادن $X = F^{-1}(U)$ یک متغیر تصادفی X را که دارای تابع توزیع پیوستهٔ F است می توان شبیه سازی نمود.

مثال ۲ الف . شبیه سازی یك متغیر تصادفی نمایی :اگر $F(x) = 1 - e^{-x}$ آن گاه $F^{-1}(u)$ آن مقدار x است که در معادله زیر صدق می کند

$$1 - e^{-x} = u$$

یا

$$x = -\log(1 - u)$$

بنابر این اگر U یک متغیر یکنواخت (0, 1) باشد آن گاه

$$F^{-1}(U) = -\log(1 - U)$$

دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ است. چون توزیع $1 - U$ نیزدر(0, 1) یکنواخت است لذا $-\log U$ نمایی با میـانگین ۱ خواهد بود. چون وقتی X نمایی با میـانگین ۱ باشـد cX نمایی با میـانگین c است لذا $-c \log U$ نمایی با میانگین c خواهد بود.

از نتایج مثال ۲ الف نیز برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی گاما می توان استفاده کرد.

مثال ۲ ب . شبیه سازی یك متغیر تصادفی گاما با پارامترهای (n, λ)

برای شبیه سازی از یک توزیع گاما با پارامترهای (n, λ) وقتی n عددی صحیح است از این واقعیت استفـاده می کنیم که مجـموع n متـغیر تصـادفی نمایی مسـتقل هریک با نرخ λ دارای

همین توزیع است . بنابراین اگر U_n , . . . , U_1 متغیرهای تصادفی یکنواخت مستقل $(0\,,\,1)$ باشند آن گاه

$$X = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \log U_i = -\frac{1}{\lambda} \log \left(\prod_{i=1}^{n} U_i \right)$$

دارای توزیع مطلوب است .

۲-۲ روش عدم پذیرش

فرض کنید روشی برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که تابع چگالی آن $g(x)$ است داریم . از این فرض به عنوان پایه‌ای برای شبیه سازی از توزیع پیوسته ای با چگالی $f(x)$ ، با شبیه سازی Y از g و سپس پذیرش این مقدار شبیه سازی شده با احتمالی متناسب با $f(Y) / g(Y)$ می توان بهره گرفت .

بویژه فرض کنید c ثابتی است که

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq c \qquad \text{برای هر } y$$

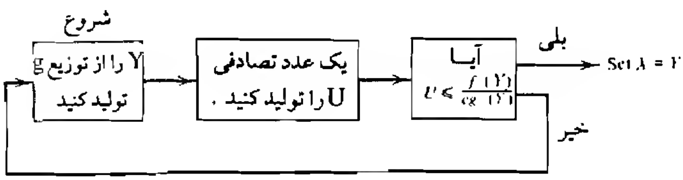
لذا به روش زیر برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که دارای چگالی f است نیاز داریم .

روش عدم پذیرش

مرحلهٔ ۱ : Y را با چگالی g و یک عدد تصادفی U را شبیه سازی کنید .

مرحلهٔ ۲ : اگر $U \leq f(Y) / cg(Y)$ قرار دهید $X = Y$ ، در غیر این صورت به مرحلهٔ ۱ بر گردید . روش عدم پذیرش بطور تصویری در شکل ۱۰ - ۱ بیان شده است .

قرار دهید .



شکل ۱۰-۱ روش عدم پذیرش برای یک متغیر تصادفی X که تابع چگالی آن f است

حال عملکرد روش عدم پذیرش را ثابت می کنیم .

حکم ۲-۲

متغیر تصادفی X که با روش عدم پذیرش تولید می شود دارای تابع چگالی f است .

برهان : فرض کنید X مقدار به دست آمده و N تعداد تکرارهای لازم باشد . پس

$$\begin{aligned}P\{X \leq x\} &= P\{Y_N \leq x\}\\ &= P\left\{Y \leq x \,\middle|\, U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right\}\\ &= \frac{P\left\{Y \leq x,\ U \leq \dfrac{f(Y)}{cg(Y)}\right\}}{K}\end{aligned}$$

که در آن $k = p\left\{U \leq \dfrac{f(Y)}{cg(Y)}\right\}$. اکنون بنا به استقلال ، تابع چگالی توأم Y و U عبارت است از

$$f(y, u) = g(y) \qquad 0 < u < 1$$

و بنابر این با استفاده از آنچه گذشت داریم

$$\begin{aligned}P\{X \leq x\} &= \frac{1}{K} \iint\limits_{\substack{y \leq x \\ 0 \leq u \leq f(y)/cg(y)}} g(y)\, du\, dy\\ &= \frac{1}{K}\int_0^x \int_0^{f(y)/cg(y)} du\, g(y)\, dy \qquad (۲-۲)\\ &= \frac{1}{cK}\int_0^x f(y)\, dy\end{aligned}$$

با توجه به این که f یک چگالی است و وقتی $x \to \infty$ داریم

$$1 = \frac{1}{cK}\int_0^\infty f(y)\, dy = \frac{1}{cK}$$

بنابر این از معادلهٔ (۲ - ۲) به دست می آوریم

$$P\{X \leq x\} = \int_0^x f(y)\, dy$$

که اثبات را کامل می کند .

تذکر : (الف) باید توجه کنیم که با تولید یک عدد تصادفی U و سپس پذیرش Y هرگاه $U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}$ ، « مقدار Y را با احتمال $\frac{f(Y)}{cg(Y)}$ می پذیریم» .

(ب) چون نتیجهٔ هر تکرار مستقلاً و با احتمال $P\left\{U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right\} = k = \frac{1}{c}$ یک مقدار پذیرش شده است لذا تعداد تکرارها دارای توزیع هندسی با میانگین c است .

مثال ۲ ب شبیه سازی یك متغیر تصادفی نرمال : برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z (یعنی متغیری با میانگین 0 و واریانس ۱) ابتدا توجه می کنیم که قدر مطلق Z دارای تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad 0 < x < \infty \tag{۲-۳}$$

با استفاده از روش عدم پذیرش و این که g تابع چگالی نمایی با میانگین یک است شبیه سازی را از تابع چگالی پیش شروع می کنیم، یعنی

$$g(x) = e^{-x} \qquad 0 < x < \infty$$

اکنون توجه می کنیم که

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \sqrt{2/\pi}\, \exp\left\{\frac{-(x^2 - 2x)}{2}\right\} \\
&= \sqrt{2/\pi}\, \exp\left\{\frac{-(x^2 - 2x + 1)}{2} + \frac{1}{2}\right\} \\
&= \sqrt{2e/\pi}\, \exp\left\{\frac{-(x-1)^2}{2}\right\} \\
&\leq \sqrt{2e/\pi}
\end{aligned} \tag{۲-۴}$$

بنابراین می توانیم $C = \sqrt{2e/\pi}$ فرض کنیم و لذا از معادلهٔ (۲-۴) داریم

$$\frac{f(x)}{cg(x)} = \exp\left\{\frac{-(x-1)^2}{2}\right\}$$

پس با استفاده از روش عدم پذیرش می توانیم مقدار مطلق یک متغیر تصادفی نرمال واحد را به شرح زیر شبیه سازی کنیم .

(الف) متغیرهای تصادفی مستقل Y و U را که Y نمایی با نرخ ۱ و U در (۱ و 0) یکنواخت است تولید می کنیم.

(ب) اگر $U \le \exp\left\{-\frac{(Y-1)^2}{2}\right\}$ باشد $X = Y$ قرار دهید و در غیر این صورت به (الف) بر گردید. وقتی یک متغیر تصادفی X با تابع چگالی مانندمعادلهٔ ۲-۳ شبیه سازی کردیم آن گاه یک متغیر تصادفی نرمال واحد Z که با احتمال مساوی X یا X - است می توان تولید نمود.

در مرحلهٔ (ب) وقتی مقدار Y را می پذیریم که $U \le \exp\left\{-\frac{(Y-1)^2}{2}\right\}$ یا معادل با آن $-\log U \ge \frac{(Y-1)^2}{2}$. با وجود این در مثال ۲ الف نشان دادیم که $-\log U$ نمایی با نرخ ۱ و لذا مراحل (الف) و (ب) معادلند با

(الف)′ نماییهای Y_1 و Y_2 را با نرخ ۱ تولید کنید.

(ب)′ اگر $Y_2 \ge (Y_1 - 1)^2 / 2$ آن گاه قرار دهید $X = Y_1$، در غیر این صورت به (الف) باز گردید. حال فرض کنید نتیجهٔ بالا Y_1 بوده و مورد پذیرش باشد، لذا می دانیم که Y_2 بزرگتر از $(Y_1 - 1)^2/2$ است. به چه میزان یکی بیشتر از دیگری است؟ برای جواب دادن به این سؤال خاطر نشان می کنیم که Y_2 نمایی با نرخ ۱ است و بنابراین اگر بدانیم از مقدار معینی بیشتر است، آن مقدار که Y_2 بیشتر از $\frac{(Y_1-1)^2}{2}$ است [یعنی «طول عمر اضافی» بیشتر از زمان $\frac{(Y_1-1)^2}{2}$] بنا به خاصیت بی حافظه بودن دارای توزیع نمایی با نرخ ۱ است. یعنی وقتی مرحلهٔ (ب)′ راپذیرفتیم نه فقط X (مقدار مطلق یک نرمال واحد) بلکه با محاسبهٔ $Y_2 - (Y_1 - 1)^2/2$ یک متغیر تصادفی نمایی (مستقل از X) بانرخ۱ را نیز می توان تولیدنمود.

بنابراین بطور خلاصه الگوریتم زیر را داریم که یک نمایی با نرخ ۱ و یک متغیر تصادفی مستقل نرمال واحد را تولید می کند.

مرحلهٔ ۱: Y_1 را که یک متغیر تصادفی نمایی با نرخ ۱ است تولید کنید.

مرحلهٔ ۲: Y_2 را که یک متغیر تصادفی نمایی با نرخ ۱ است تولید کنید.

مرحلهٔ ۳: اگر $Y_2 - (Y_1 - 1)^2/2 > 0$ است قرار دهید $Y_2 - (Y_1 - 1)^2/2$ و به مرحلهٔ ۴ بروید، در غیر این صورت به مرحلهٔ ۱ بروید.

مرحلهٔ ۴: یک متغیر تصادفی U را تولید نموده و قرار دهید

$$Z = \begin{cases} Y_1 & U \le 1/2 \\ -Y_1 & U > 1/2 \end{cases}$$

متغیرهای تصادفی Z و Y که در بالا تولید شدند مستقلند و Z دارای توزیع نرمال با میانگین 0 و واریانس ۱ و Y دارای توزیع نمایی با شاخص ۱ است. (اگر بخواهیم متغیر تصادفی نرمال دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد فرض کنید $\mu + \sigma Z$).

چند تبصره : (الف) چون $c = \sqrt{2e/\pi} \approx 1/32$ است لذا تعداد تکرارهای مرحلهٔ ۲ دارای توزیع هندسی با میانگین ۱٫۳۲ است.

(ب) اگر بخواهیم دنباله ای از متغیرهای تصادفی نرمال واحد را تولید کنیم، آن گاه از متغیر تصادفی نمایی Y که در مرحلهٔ ۳ به دست آمد به عنوان نمایی اولیهٔ مورد نیاز در مرحلهٔ ۱ برای تولید نرمال بعد می توان استفاده نمود. بنابراین بطور متوسط با تولید (۱ − ۱٫۳۲ × ۲=)۱٫۶۴ نمایی و محاسبهٔ ۱٫۳۲ توان دو می توانیم یک نرمال واحد را شبیه سازی کنیم.

مثال ۲ ت روش قطبی شبیه سازی متغیرهای تصادفی نرمال : در مثال ۷ ب فصل ۶ ثابت کردیم که اگر X و Y متغیرهای تصادفی نرمال واحد مستقل باشند آن گاه مختصات قطبی آنها $\theta = tg^{-1}(Y/X), R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ مستقل بوده و R^2 دارای توزیع نمایی با میانگین ۲ و θ دارای توزیع یکنواخت در $(0, 2\pi)$ است. بنابراین اگر U_1 و U_2 اعداد تصادفی باشند آن گاه (با به کاربردن نتیجهٔ مثال ۲الف) قرار می دهیم

$$R = (-2 \log U_1)^{1/2}$$
$$\Theta = 2\pi U_2$$

که نتیجه می شود

$$\begin{aligned} X &= R\cos\Theta = (-2\log U_1)^{1/2}\cos(2\pi U_2) \\ Y &= R\sin\Theta = (-2\log U_1)^{1/2}\sin(2\pi U_2) \end{aligned} \qquad (۵-۲)$$

متغیرهای تصادفی نرمال واحد مستقلند.

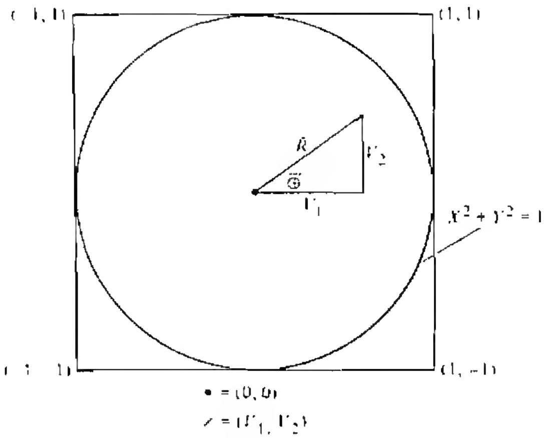
روش بالا برای تولید متغیرهای تصادفی نرمال واحد را روش باکس ـ مولر می نامند. لزوم محاسبهٔ مقادیر کسینوس و سینوس بالا کارایی روش را کم می کند. مع هذا برای گریز از این شکل اتلاف وقت راهی وجود دارد. برای شروع توجه می کنیم که اگر U در (0, 1)

یکنواخت باشد آن گاه $2U$ در $(0, 2)$ یکنواخت بوده و بنابر این $2U-1$ در $(-1, 1)$ یکنواخت است. پس اگر اعداد تصادفی U_1 و U_2 را تولید نموده و قرار دهیم

$$V_1 = 2U_1 - 1$$

$$V_2 = 2U_2 - 1$$

آن گاه $(V_1$ و $V_2)$ در مربعی که مساحت آن ۴ و مرکز آن $(0, 0)$ است دارای توزیع یکنواخت است (شکل ۱۰-۲ را ملاحظه کنید).



شکل ۱۰- ۲

اکنون فرض کنید تولید جفتهای $(V_1$ و $V_2)$ را متوالیاً تا حصول جفتی که در دایره ای به شعاع ۱ و مرکز $(0, 0)$ قرار دارد ادامه دهیم، یعنی $(V_1$ و $V_2)$ را به‌دست آوریم که $V_1^2 + V_2^2 \leq 1$ حال نتیجه می شود که توزیع این جفت $(V_1$ و $V_2)$ در دایره یکنواخت است. اگر مختصات قطبی این جفت را به $\bar{R}, \Theta$ نشان دهیم آن گاه اثبات مستقل بودن $\bar{R}, \Theta$ آسان بوده و توزیع R^2 و Θ به ترتیب در $(0,1)$ و $(0, 2\pi)$ یکنواخت است. (مسألهٔ ۱۳ را ملاحظه کنید)

چون

$$\sin\Theta = V_2/\bar{R} = -\frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

$$\cos\Theta = V_1/\bar{R} = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

از معادلهٔ (۲ - ۵) نتیجه می شود که با تولید عدد تصادفی دیگر U و قرار دادن

$$X = (-2\ \log U)^{1/2}\ V_1/\overline{R}$$
$$Y = (-2\ \log U)^{1/2}\ V_2/\overline{R}$$

می توانیم نرمالهای واحد مستقل X و Y را تولید کنیم. در حقیقت چون (با فرض $V_1^2 + V_2^2 \le 1$) $\overline{R}^2$ در (0 , 1) یکنواخت و مستقل از Θ است لذا به جای تولید عدد تصادفی جدید U از آن می توان استفاده نمود بنابراین نشان می دهیم

$$X = (-2\ \log\overline{R}^2)^{1/2}\ V_1/\overline{R} = \sqrt{\frac{-2\ \log S}{S}}\ V_1$$
$$Y = (-2\ \log\overline{R}^2)^{1/2}\ V_2/\overline{R} = \sqrt{\frac{-2\ \log S}{S}}\ V_2$$

نرمالهای واحد مستقلند هرگاه

$$S = \overline{R}^2 = V_1^2 + V_2^2$$

بنابراین بطور خلاصه برای تولید یک جفت نرمال واحد مستقل روش زیر را داریم:

مرحلهٔ ۱: اعداد تصادفی U_1 و U_2 را تولید می کنیم.

مرحلهٔ ۲: قرار می دهیم $V_1 = 2U_1 - 1$ ، $V_2 = 2U_2 - 1$ ، $S = V_1^2 + V_2^2$

مرحلهٔ ۳: اگر $S > 1$ به مرحلهٔ ۱ می گردیم

مرحلهٔ ۴: به نرمالهای واحد مستقل

$$X = \sqrt{\frac{-2\ \log S}{S}}\ V_1,\ Y = \sqrt{\frac{-2\ \log S}{S}}\ V_2$$

بر می گردیم.

روش بالا روش قطبی نامیده می شود. چون احتمال این که یک نقطهٔ از مربع در داخل دایره قرار گیرد $\frac{\pi}{4}$ است (مساحت دایره تقسیم بر مساحت مربع) لذا روش قطبی بطور متوسط نیاز به $\frac{4}{\pi} = 1/273$ تکرار مرحلهٔ ۱ دارد. بنابراین برای تولید دو نرمال واحد مستقل بطور متوسط ۲٫۵۴۶ عدد تصادفی، ۱ لگاریتم، ۱ ریشهٔ دوم، ۱ تقسیم و ۴٫۵۴۶ ضرب لازم دارد.

مثال ۲ج شبیه سازی یک متغیر تصادفی کی دو . توزیع $\chi^2_n = Z^2_1 + \dots + Z^2_n$ که Z_i ، $i = 1, \dots,$

n نرمالهای واحد مستقلند توزیع کی دو با n درجهٔ آزادی است. در بخش ۳ فصل ۶ نشان داده شد که $Z_1^2 + Z_2^2$ دارای توزیع نمایی با نرخ $\frac{1}{2}$ است. بنابراین وقتی n زوج است $(n = 2k)$، $-2 \log \left(\prod_{i=1}^{k} U_i \right)$ دارای توزیع گاما با پارامترهای $\left(k, \frac{1}{2}\right)$ می‌باشد. در نتیجه توزیع χ^2_{2k} کی دو با ۲k درجهٔ آزادی خواهد بود. ابتدا با شبیه سازی متغیر تصادفی نرمال واحد Z و سپس افزودن Z^2 به قبلی می توانیم یک متغیر تصادفی کی‌دو با ۱ + ۲k درجهٔ آزادی شبیه سازی کنیم؛ یعنی

$$\chi^2_{2k+1} = Z^2 - 2 \log \left(\prod_{i=1}^{k} U_i \right)$$

که Z ، $U_1, \ldots, U_n$ مستقل بوده و Z متغیر تصادفی نرمال واحد و بقیه متغیرهای تصادفی یکنواخت در $(0, 1)$ می‌باشند.

۳- شبیه‌سازی توزیعهای گسسته

تمام روشهای عمومی برای شبیه سازی متغیرهای تصادفی از توزیعهای پیوسته در حالت گسسته نیز مشابه دارند. برای مثال اگر بخواهیم یک متغیر تصادفی Z که دارای تابع چگالی احتمال

$$P\{X = x_j\} = P_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, \qquad \sum_j P_j = 1$$

می‌باشد شبیه سازی کنیم از مشابه روش تبدیل معکوس برای حالت گسسته می توان استفاده نمود. برای شبیه سازی X که $P\{X = x_j\} = P_j$ است فرض کنید U در $(0,1)$ دارای توزیع یکنواخت بوده و قرار می دهیم

$$X = \begin{cases} x_1 & U < P_1 \\ x_2 & P_1 < U < P_1 + P_2 \\ \vdots & \\ x_j & \sum_{i}^{j-1} P_i < U < \sum_{i}^{j} P_i \\ \vdots & \end{cases}$$

چون

$$P\{X = x_j\} = P\left\{\sum_{1}^{j-1} P_i < U < \sum_{1}^{j} P_i\right\} = P_j$$

می بینیم که X دارای توزیع مورد نظر است .

مثال ۳ الف توزیع هندسی. فرض کنید آزمایشهای مستقلی که هریک نتیجه اش « موفقیت» با احتمال $0 < p < 1$, p است را متوالیاً انجام داده تا یک موفقیت رخ دهد ، اگر X تعداد آزمایشهای لازم باشد آن گاه

$$P\{X = i\} = (1 - p)^{i-1}p \qquad i \geq 1$$

که با توجه به این که اگر $i - 1$ آزمایش اول شکست و آزمایش i ام موفقیت است داریم $X = i$. متغیر تصادفی X را متغیر تصادفی هندسی با پارامتر p می نامند. چون

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{j-1} P\{X = i\} &= 1 - P\{X > j - 1\}\\ &= 1 - P\{\text{تمام } j - 1 \text{ آزمایش شکست}\}\\ &= 1 - (1 - p)^{j-1} \qquad j \geq 1\end{aligned}$$

لذا این متغیر تصادفی را با تولید یک عدد تصادفی U و سپس مساوی قراردادن X با آن مقدار j که

$$1 - (1 - p)^{j-1} < U < 1 - (1 - p)^j$$

یا معادل آن مقدار j که

$$(1 - p)^j < 1 - U < (1 - p)^{j-1}$$

می توان شبیه سازی نمود. چون $1 - U$ و U همتوزیع هستند لذا X را به صورت

$$\begin{aligned}X &= \min\{j : (1 - p)^j < U\}\\ &= \min\{j : j\log(1 - p) < \log U\}\\ &= \min\left\{j : j > \frac{\log U}{\log(1 - p)}\right\}\end{aligned}$$

می توان تعریف نمود که با توجه به این که $\log(1 - p)$ منفی است علامت نا مساوی تغییر می کند [زیرا $\log(1 - p) < \log 1 = 0$] . اگر از نماد [x] برای قسمت صحیح x (یعنی [x] بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی x است) استفاده کنیم می توان نوشت

$$X = 1 + \left[\frac{\log U}{\log(1-p)}\right]$$

مانند حالت پیوسته تکنیکهای شبیه سازی ویژه‌ای برای توزیعهای گسسته متداولتر اختصاص داده شده است. حال برخی از اینها را ارائه می کنیم.

مثال ۳ ب شبیه سازی یك متغیر تصادفی دو جمله‌ای. یک متغیر تصادفی دو جمله ای (n, p) را با توجه به این که آن را به صورت مجموع n متغیر تصادفی برنولی مستقل می توان نوشت به ساده‌ترین صورت شبیه سازی می شود. یعنی اگر U_1 ، U_2 ، . . . ، U_n متغیرهای مستقل یکنواخت $(0, 1)$ باشند آن گاه با فرض

$$X_i = \begin{cases} 1 & U_i < p \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نتیجه می شود که $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای n , p است.

مثال ۳ پ شبیه سازی یك متغیر تصادفی پواسن. برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی پواسن با میانگین λ ، متغیرهای تصادفی مستقل یکنواخت $(0, 1)$ ، U_1 ، U_2 ، . . . ، را تولید نموده و سپس با توجه به مقدار زیر توقف کنید.

$$N = \min\left\{n : \prod_{i=1}^{n} U_i < e^{-\lambda}\right\}$$

متغیر تصادفی $X \equiv N - 1$ دارای توزیع مطلوب است. یعنی اگر به تولید اعداد تصادفی تا این که حاصل ضرب آنها کمتر از $e^{-\lambda}$ شود ادامه دهیم آن گاه عدد مورد نظر منهای ۱ ، پواسن با میانگین λ است، که $X \equiv N - 1$ در واقع یک متغیر تصادفی پواسن با میانگین λ است که آن را بسهولت با توجه به این که

$$X + 1 = \min\left\{n : \prod_{i=1}^{n} U_i < e^{-\lambda}\right\}$$

با

$$X = \max\left\{n : \prod_{i=1}^{n} U_i \geq e^{-\lambda}\right\} \qquad \text{و} \qquad \prod_{i=1}^{0} U_i \equiv 1$$

معادل است یا با در نظر گرفتن لگاریتم معادل است با

$$X = \max \left\{ n : \sum_{i=1}^{n} \log U_i \geq -\lambda \right\}$$

یا

$$X = \max \left\{ n : \sum_{i=1}^{n} -\log U_i \leq \lambda \right\}$$

می توان دید .

با وجود این $\log U_i$ - نمایی با نرخ ۱ است و بنابراین X را به عنوان ماکزیمم تعداد نماییهایی که دارای نرخ ۱ بوده و مجموع آنها هنوز کمتر از λ است می توان در نظر گرفت . اما با توجه به این که زمانهای بین پیشامدهای متوالی یک فرآیند پواسن با نرخ ۱ نماییهای مستقل با همین شاخصند لذا X برابر تعداد پیشامدها تا زمان λ از یک فرآیند پواسن با نرخ ۱ است و بنابراین توزیع X پواسن با میانگین λ است .

۴- روشهای کاهش واریانس

فرض کنید X_1 ، . . . ، X_n دارای توزیع توأم معلوم بوده و فرض کنید

$$\theta = E[g(X_1, \ldots, X_n)]$$

باشد که در آن g تابع مشخصی است . گاهی اوقات محاسبهٔ تحلیلی مورد فوق بسیار مشکل است و وقتی به این مورد بر می‌خوریم می توانیم از شبیه سازی استفاده نموده و θ را برآورد نماییم. این کار را به صورت زیر انجام می دهیم : $X_1^{(1)}, \ldots, X_n^{(1)}$ را که با $X_1, \ldots, X_n$ همتوزیعند تولید کرده و قرار می دهیم

$$Y_1 = g(X_1^{(1)}, \ldots, X_n^{(1)})$$

اکنون مجموعهٔ دومی از متغیرهای تصادفی (مستقل از مجموعه اول) ، $X_1^{(2)}, \ldots, X_n^{(2)}$ را که دارای توزیع $X_1, \ldots, X_n$ است شبیه سازی نموده و قرار می‌دهیم

$$Y_2 = g(X_1^{(2)}, \ldots, X_n^{(2)})$$

این کار را تا تولید K (عدد از پیش تعیین شده) مجموعه و بنابراین محاسبهٔ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$

ادامه می دهیم . حال $Y_1 , Y_2 , \ldots , Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع هستند که هریک دارای توزیع $g(X_1 , \ldots , X_n)$ می باشند. بنابراین اگر Y را متوسط این k متغیر تصادفی فرض کنیم، یعنی

$$\overline{Y} = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_i}{k}$$

آن گاه

$$E[\overline{Y}] = \theta$$
$$E[(\overline{Y} - \theta)^2] = \operatorname{Var}(\overline{Y})$$

بنابراین $\overline{Y}$ را به عنوان یک برآورد به کار می بریم . چون امید توان دوم تفاوت بین $\overline{Y}$ و θ برابر واریانس $\overline{Y}$ است می خواهیم این کمیت تاجایی که ممکن است کوچک باشد. [در وضعیت پیش $\operatorname{Var}(\overline{Y}) = \operatorname{Var}(Y_i) / k$ است که ازقبل معلوم نیست وباید از مقادیرتولیدشدهٔ $Y_1 , \ldots , Y_n$ برآورد شود] . حال سه روش عمومی کاهش واریانس یک برآورد گر را ارائه می کنیم

۴ - ۱ استفادهٔ از متغیرهای متضاد

فرض کنید در وضعیت قبل متغیرهای تصادفی همتوزیع Y_1 و Y_2 که دارای میانگین θ می باشند را تولید کرده باشیم. حال داریم

$$\operatorname{Var}\left(\frac{Y_1 + Y_2}{2}\right) = \frac{1}{4}[\operatorname{Var}(Y_1) + \operatorname{Var}(Y_2) + 2\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2)]$$
$$= \frac{\operatorname{Var}(Y_1)}{2} + \frac{\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2)}{2}$$

بنابراین اگر Y_1 و Y_2 به جای استقلال همبستگی منفی داشته باشند (به جهت این که واریانس کاهش پیدا می کند) سودمند خواهد بود. برای چگونگی انجام آن فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_1 , \ldots , X_n$ مستقل بوده و علاوه بر آن هریک با توجه به روش تبدیل وارون ، شبیه سازی شده باشند. یعنی X_i از $F^{-1}_i(U_i)$ که U_i عددی تصادفی و F_i توزیع X_i است شبیه سازی شده باشد . بنابر این Y_1 را به صورت زیر می توان بیان کرد

$$Y_1 = g(F_1^{-1}(U_1), \ldots , F_n^{-1}(U_n))$$

حال چون $U - 1$ که U عددی است تصادفی (U و $U - 1$ همبستگی منفی دارند) نیز در $(0, 1)$

یکنواخت است لذا Y_2 که به صورت زیر تعریف می شود همان توزیع Y_1 را خواهد داشت.

$$Y_2 = g(F_1^{-1}(1 - U_1), \ldots, F_n^{-1}(1 - U_n))$$

بنابر این اگر Y_1 و Y_2همبستگی منفی داشته باشند آن گاه تولید نمودن Y_2 به صورت بالا نسبت به این که اگر Y_1 و Y_2 توسط مجموعهٔ جدیدی از اعداد تصادفی تولید شوند واریانس کمتری خواهد داشت. (علاوه براین از نظر محاسبات صرفه جویی می شود زیرا به جای تولید n عدد تصادفی اضافی تنها لازم است هریک از n مقدار را از ۱ کم کنیم). گرچه بطور کلی مطمئن نیستیم که Y_1 و Y_2 همبستگی منفی دارند ولی اغلب چنین است و در واقع می توان ثابت نمود که اگر g یک تابع یکنوا باشد آن گاه Y_1 و Y_2 همبستگی منفی دارند.

۴-۳ کاهش واریانس با مشروط نمودن

موضوع را با اشاره به رابطهٔ واریانس شرطی (بخش ۶-۴ فصل ۷ را ملاحظه کنید) آغاز می کنیم.

$$\mathrm{Var}(Y) = E[\mathrm{Var}(Y|Z)] + \mathrm{Var}(E[Y|Z])$$

حال فرض کنید می خواهیم با شبیه سازی $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ و سپس محاسبهٔ $Y = g(\mathbf{X})$، $E[g(X_1, \ldots, X_n)]$ را برآورد کنیم. حال اگر برای متغیر تصادفی Z بتوانیم $E[Y|Z]$ را محاسبه کنیم آن گاه چون $\mathrm{Var}(Y|Z) \geq 0$ است بنا به فرمول واریانس شرطی بالا

$$\mathrm{Var}(E[Y|Z]) \leq \mathrm{Var}(Y)$$

نتیجه می شود و چون $E[E[Y|Z]] = E[Y]$ بنابر این $E[Y|Z]$ برآورد کنندهٔ بهتری از $E[Y]$ است تا Y.

مثال ۴ الف. برآورد کنندهٔ π. فرض کنید U_1 و U_2 اعدادتصادفی بوده $V_i = 2U_i - 1$، $i = 1, 2$ باشد. بطوری که در مثال ۲ ت اشاره نمودیم (V_1, V_2) در مربعی به مساحت ۴ که در مرکز (0, 0) قرار دارد دارای توزیع یکنواخت است. احتمال قرار گرفتن این نقطه در داخل دایره به شعاع ۱ و مرکز (0, 0) (شکل ۱۰ - ۲ را ملاحظه کنید) برابر $\frac{\pi}{4}$ (نسبت مساحت دایره به مربع) است. بنابراین اگر تعداد زیادی از این جفتها را شبیه سازی نموده و قرار دهیم

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{جفت } j\text{ام در داخل دایره باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نتیجه می شود که I_j ، $j = 1, \ldots, n$ متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع دارای میانگین $E[I_j] = \frac{\pi}{4}$ است . بنابراین بنا به قانون قوی اعداد بزرگ داریم

$$\frac{I_1 + \cdots + I_n}{n} \longrightarrow \pi/4 \qquad n \to \infty$$

بنابراین به این نتیجه می رسیم که اگر تعداد زیادی از جفتهای (V_1, V_2) را شبیه سازی نموده و نسبت آنهایی را که در داخل دایره قرار می گیرند در ۴ ضرب کنیم می توانیم π را بدقت تقریب کنیم .

با وجود این برآورد کنندهٔ بالا را با استفاده از امید شرطی می توان بهتر نمود . اگر برای جفت (V_1, V_2) ، I را متغیر نشانگر فرض کنیم آن گاه بهتر است به جای استفادهٔ از مقدار مشاهدهٔ شدهٔ I مقدار مشروط آن را با فرض V در نظر گرفته و از عبارت زیر استفاده کنیم

$$\begin{aligned} E[I|V_1] &= P\{V_1^2 + V_2^2 \le 1|V_1\} \\ &= P\{V_2^2 \le 1 - V_1^2|V_1\} \end{aligned}$$

حال داریم ،

$$\begin{aligned} P\{V_2^2 \le 1 - V_1^2|V_1 = v\} &= P\{V_2^2 \le 1 - v^2\} \\ &= P\{-\sqrt{1 - v^2} \le V_2 \le \sqrt{1 - v^2}\} \\ &= \sqrt{1 - v^2} \end{aligned}$$

و بنابراین

$$E[I|V_1] = E[\sqrt{1 - V_1^2}]$$

بنابراین یک اصلاح در به کاربردن مقدار متوسط I برآورد $\frac{\pi}{4}$ این است که از مقدار متوسط $\sqrt{1 - V_1^2}$ استفاده کنیم . در واقع چون

$$E[\sqrt{1 - V_1^2}] = \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - v^2}\, dv = \int_0^1 \sqrt{1 - u^2}\, du = E[\sqrt{1 - U^2}]$$

که U در (0, 1) یکنواخت است می توانیم n عدد تصادفی U را تولید نموده و از مقدار متوسط $\sqrt{1-U^2}$ به عنوان برآورد $\frac{\pi}{4}$ استفاده کنیم. (مسألهٔ ۱۴ نشان می دهد که این برآوردگر و متوسط n مقدار $\sqrt{1-V^2}$ دارای یک واریانس‌اند).

برآوردگر بالا برای π را با توجه به این که تابع $g(u) = \sqrt{1-u^2}$ ، $0 \le u \le 1$ یکنوای کاهشی u است و لذا روش متغیرهای متضاد واریانس برآوردگر $E[\sqrt{1-U^2}]$ را کاهش می دهد، حتی مجدداً می توان بهتر نمود. یعنی به عوض تولید n عدد تصادفی و به کاربردن مقدار متوسط $\sqrt{1-U^2}$ به‌عنوان یک برآوردگر π ، با تولید تنها $\frac{n}{2}$ عدد تصادفی و سپس استفاده از نصف متوسط $\sqrt{1-U^2} + \sqrt{1-(1-U)^2}$ به‌عنوان برآورد کنندهٔ $\frac{\pi}{4}$ یک برآوردکنندهٔ بهتر به‌دست آورد.

جدول زیر نتیجه برآورد π بر مبنای سه برآوردکنندهٔ بالا را با توجه به شبیه سازی و استفادهٔ از ۱۰۰۰۰ = n می دهد.

برآورد π	روش
۳/۱۶۱۲	استفاده از نسبت نقاط تصادفی که در داخل دایره واقع می شوند
۳/۱۲۸۴۴۸	استفادهٔ از مقدار متوسط $\sqrt{1-U^2}$
۳/۱۳۹۵۷۸	استفادهٔ از مقدار متوسط $\sqrt{1-U^2} + \sqrt{1-(1-U)^2}$

با شبیه سازی مجدد و استفاده از روش آخر و ۶۴۰۰۰ = n برآورد ۳/۱۴۳۲۸۸ حاصل می شود.

۴-۳ متغیرهای کنترل

مجدداً فرض کنید می خواهیم با استفاده از شبیه سازی $E[g(X)]$ که $X = (X_1, \ldots, X_n)$ را برآورد کنیم. ولی اکنون فرض می کنیم برای تابع f امید ریاضی $f(X)$ معلوم است. یعنی $E[f(X)] = \mu$ معلوم است. پس برای هر ثابت a می توانیم از

$$W = g(X) + a[f(X) - \mu]$$

به عنوان یک برآوردگر $E[g(X)]$ استفاده کنیم. حال

$$\text{Var}(W) = \text{Var}[g(\mathbf{X})] + a^2 \text{Var}[f(\mathbf{X})] + 2a \text{Cov}[g(\mathbf{X}), f(\mathbf{X})] \tag{۱-۴}$$

به سهولت می توان ثابت کرد که وقتی

$$a = \frac{-\text{Cov}[f(\mathbf{X}), g(\mathbf{X})]}{\text{Var}[f(\mathbf{X})]} \tag{۲-۴}$$

باشد مقدار فوق مینیمم می شود و برای این مقدار a داریم

$$\text{Var}(W) = \text{Var}[g(\mathbf{X})] - \frac{[\text{Cov}[f(\mathbf{X}), g(\mathbf{X})]]^2}{\text{Var}[f(\mathbf{X})]} \tag{۳-۴}$$

متأسفانه چون معمولاً هیچ کدام از $\text{Var}[f(X)]$ و $\text{Cov}[f(X), g(X)]$ معلوم نیستند بنابراین معمولاً کاهش واریانس بالا را نمی توان به دست آورد. در عمل یک روش این است که این مقادیر را حدس بزنیم و امیدوار باشیم که W نتیجه شده نسبت به $g(X)$ واریانس کمتری داشته باشد در صورتی که امکان دیگر این است که از داده های شبیه سازی شده برای برآورد این کمیتها استفاده کنیم.

مسائل

۱- الگوریتم زیر یک تبدیل تصادفی عناصر $1, 2, \ldots, n$ را تولید می کند این تا حدودی سریعتر از آن است که در مثال ۱الف ارائه شد ولی در آن وضعیت ثابتی تا پایان الگوریتم وجود ندارد. در این الگوریتم $P(i)$ را به عنوان عنصر در وضعیت i می توان تفسیر نمود.

مرحلهٔ ۱ : قرار دهید $k = 1$

مرحلهٔ ۲ : قرار دهید $P(1) = 1$

مرحلهٔ ۳ : اگر $k = n$ توقف کنید و فرض کنید $K = K + 1$

مرحلهٔ ۴ : یک عدد تصادفی U را تولید نموده و فرض کنید

$$P(k) = P([kU] + 1)$$
$$P([kU] + 1) = k$$

به مرحلهٔ ۳ بروید

(الف) عملکرد الگوریتم را بیان کنید.

(ب) نشان دهید که در تکرار k یعنی وقتی مقدار اولیهٔ P (k) منظور می شود، P(1) , P (2) ,. . . , P (k) یک تبدیل تصادفی k, . . . ,1, 2 است.

راهنمایی : با استفاده از استقرا به صورت زیر استدلال کنید

$$\begin{aligned} P_k\{i_1, i_2, \ldots, i_{j-1}, k, i_j, \ldots, i_{k-2}, i\} &= P_{k-1}\{i_1, i_2, \ldots, i_{j-1}, i, i_j, \ldots, i_{k-2}\}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{k!} \quad \text{بنا به فرض استقرا} \end{aligned}$$

۲- روشی را برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که دارای چگالی زیر است بسازید.

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & -\infty < x < 0 \\ e^{-2x} & 0 < x < \infty \end{cases}$$

۳- روشی برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که دارای تابع چگالی احتمال زیر است ارائه نمائید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2) & 2 \le x \le 3 \\ \frac{1}{2}\left(2-\frac{x}{3}\right) & 3 < x \le 6 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۴- روشی را شبیه سازی یک متغیر تصادفی که دارای تابع توزیع زیر است ارائه کنید.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le -3 \\ \frac{1}{2}+\frac{x}{6} & -3 < x < 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{x^2}{32} & 0 < x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

۵- با استفاده از روش تبدیل معکوس روشی برای تولیدیک متغیر تصادفی از توزیع وایبل ارائه نمایید.

$$F(t) = 1 - e^{-at^{\beta}} \qquad t \ge 0$$

۶- روشی برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که دارای تابع نرخ شکست زیر است ارائه نمایند

(الف) $\lambda(t) = c$

(ب) $\lambda(t) = ct$

(پ) $\lambda(t) = ct^2$

(ت) $\lambda(t) = ct^3$

۷- F تابع توزیع به صورت زیر است

$$F(x) = x^n \qquad 0 < x < \infty$$

(الف) روشی را برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که دارای توزیع F است و تنها از یک عدد تصادفی استفاده می کند ارائه نمایید.

(ب) فرض کنید $U_1, \ldots, U_n$ اعداد تصادفی مستقلند، ثابت کنید

$$P\{\max(U_1, \ldots, U_n) \le x\} = x^n$$

(پ) با استفاده از بخش (ب) روشی دومی را برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی که دارای توزیع F است ارائه نمائید.

۸- فرض کنید شبیه سازی از F_i برای هر $i = 1, \ldots, n$ نسبتاً ساده است. از توابع زیر چطور می توان شبیه سازی نمود.

(الف) $$F(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x)$$

(ب) $$F(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(x)]$$

۹- فرض کنید روشی برای شبیه سازی متغیرهای تصادفی از توزیعهای F_1 و F_2 داریم، توضیح دهید که از توزیع زیر چگونه شبیه سازی می کنید

$$F(x) = pF_1(x) + (1 - p)F_2(x) \qquad 0 < p < 1$$

روشی را برای شبیه سازی از تابع زیر ارائه کنید

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(1 - e^{-3x}) + \frac{2}{3}x & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{3}(1 - e^{-3x}) + \frac{2}{3} & x > 1 \end{cases}$$

۱۰- در مثال ۲ پ مقدار مطلق یک نرمال واحد را با به کاربردن روش عدم پذیرش در متغیرهای تصادفی نمایی با نرخ ۱ شبیه سازی نمودیم. حال این سؤال پیش می آید که آیا می توانیم الگوریتم کارآمدی را با استفاده از یک چگالی نمایی دیگر به دست آوریم، یعنی می توانیم

چگالی $g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ را به کار ببریم. نشان دهید که وقتی $\lambda = 1$ باشد میانگین تعداد تکرارهای لازم در طرح عدم پذیرش مینیمم می شود.

۱۱- با استفاده از روش عدم پذیرش با $g(x) = 1$, $o < x < 1$ ، الگوریتمی را برای شبیه سازی یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 60x^3(1-x)^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱۲- توضیح دهید که از اعداد تصادفی جهت تقریب $\int_0^1 k(x)dx$ که $k(x)$ تابع دلخواهی است چگونه استفاده می کنید.

راهنمایی: اگر U در $(0, 1)$ یکنواخت باشد $E[k(U)]$ چقدر است؟

۱۳- فرض کنید (X,Y) در دایره ای به شعاع ۱ و مرکز مبدأ دارای توزیع یکنواخت باشد. چگالی توأم آن عبارت است از

$$f(x,y) = 1/\pi, \qquad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

فرض کنید $R = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ و $\theta = tg^{-1}(Y/x)$ مختصات قطبی آن را نشان دهد.

ثابت کنید R و θ که R^2 در $(1 , 0)$ یکنواخت و θ در $(0 ، 2\pi)$ یکنواخت است مستقلند.

۱۴- در مثال ۴ الف که V در $(-1, 1)$ و U در $(0, 1)$ یکنواخت بود ثابت کردیم

$$E[(1 - V^2)^{1/2}] = E[(1 - U^2)^{1/2}] = \pi/4$$

نشان دهید.

$$\text{Var}[(1 - V^2)^{1/2}] = \text{Var}[(1 - U^2)^{1/2}]$$

و مقدار مشترك آنها را پیدا کنید.

۱۵- (الف) ثابت کنید که اگر a همان a در (۴-۲) باشد آن گاه (۴-۱) مینیمم می شود.

(ب) ثابت کنید که مینیمم (۴-۱) بوسیلهٔ (۴-۳) داده می شود.

۱۶- فرض کنید X متغیری تصادفی در $(0,1)$ باشد که چگالی آن $f(x)$ است. ثابت کنید با شبیه سازی X و سپس منظور نمودن $\dfrac{g(X)}{f(X)}$ به عنوان برآوردمان $\int_0^1 g(x)\,dx$ را می توان برآورد نمود. در این روش که روش نمونه گیری با اهمیت نامیده شده سعی بر این است که f از نظر شکل مشابه g انتخاب شود بطوری که $\dfrac{g(X)}{f(X)}$ دارای واریانس کوچکی باشد.

فهرست راهنما

FERDOWSI UNIVERSITY OF MASHHAD

Publication No. 223

A First Course In Probability

by

Sheldon Ross

Translated by

H. Azarnoush - A. Bozorgnia

A. Meshkani - H. Niroomand

Ferdowsi University Press

1997